

**Федеральное агентство по образованию**

**Дальневосточный государственный технический университет  
(ДВПИ им. В. В. Куйбышева)**

**И.А. Терлецкий, О.Т. Каменев**

# **ФИЗИКА**

## **Часть 4**

### **Атомная физика**

*Рекомендовано Дальневосточным региональным учебно-методическим  
центром в качестве учебного пособия для студентов технических  
специальностей вузов региона*

**Владивосток  
2006**

Одобрено научно-методическим советом университета

**УДК 538.3**

**Т35**

**Физика. Ч4. Атомная физика: Учеб. пособие. / И.А. Терлецкий, О.Т. Каменев. – Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 2006. – 85с.**

В настоящем пособии даны основные законы и понятия разделов физики «Квантовая физика», « Физика твердого тела», « Физика атомного ядра», приведены примеры решения типовых задач по указанным разделам, а также задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов заочного обучения по техническим специальностям.

Печатается с оригинал-макета, подготовленного авторами.

Рецензенты:

В.Э. Осуховский, д-р физ.-мат. наук, профессор ( Тихоокеанский военный морской институт им. С.О.Макарова);

И.Н. Каневский, д-р физ.-мат. наук, профессор ( Морской государственный университет им. адм. Г.И. Невельского).

Редактор В.В. Сизова  
Техн. редактор Н.М. Белохонтова

Подписано в печать . Формат 60x84/16

Усл. печ. л. 4,88. Уч.-изд. л. 3,21.

Тираж 100 экз. Заказ

---

Издательство ДВГТУ, 690950, Владивосток, ул. Пушкинская, 10  
Типография издательства ДВГТУ, 690950, Владивосток, ул. Пушкинская, 10

© И.А. Терлецкий, О.Т.Каменев, 2006

© ДВГТУ, изд-во ДВГТУ, 2006

Цель настоящего учебно-методического пособия – оказать помощь студентам-заочникам технических специальностей ДВГТУ в изучении курса физики.

Материал курса физики разделен на четыре контрольные работы. Перед каждым контрольным заданием даются пояснения к рабочей программе, приводятся краткое изложение вопросов теоретического курса, примеры решения задач. Кроме того, в пособии даны общие методические указания, рабочая программа, примерная схема решения задач и некоторые справочные материалы.

## **Общие методические указания**

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом. Для облегчения этой работы кафедра физики организует чтение лекций, практические занятия и лабораторные работы. Поэтому процесс изучения физики состоит из следующих этапов:

- 1) проработка установочных и обзорных лекций;
- 2) самостоятельная работа над учебниками и учебными пособиями;
- 3) выполнение контрольных работ;
- 4) прохождение лабораторного практикума;
- 5) сдача зачетов и экзаменов.

Контрольные работы позволяют закрепить теоретический материал курса. В процессе изучения физики студент должен выполнить четыре контрольные работы. Решение задач контрольных работ является проверкой степени усвоения студентом теоретического курса, а рецензии на работу помогают ему доработать и правильно освоить различные разделы курса физики. Перед выполнением контрольной работы необходимо внимательно ознакомиться с примерами решения задач по данной контрольной работе, уравнениями и формулами, а также со справочными материалами, приведенными в конце методических указаний.

Контрольные работы содержат каждая по десять задач. Вариант задания контрольной работы определяется в соответствии с последней цифрой шифра зачетной книжки по таблице для контрольных работ. Если, например, последняя цифра 8, то в контрольных работах студент решает задачи 408, 418, 428, 438, 448, 458, 468, 478, 488, 498. Номера задач к контрольной работе № 4 определяются по таблице 1.

При выполнении контрольных работ необходимо соблюдать следующие правила:

- 1) указывать на титульном листе номер контрольной работы, наименование дисциплины, фамилию и инициалы студента, шифр зачетной книжки и домашний адрес;
- 2) контрольную работу следует выполнять аккуратно, оставляя поля для замечаний рецензента;

3) задачу своего варианта переписывать полностью, а заданные физические величины выписывать отдельно, при этом все числовые величины должны быть переведены в одну систему единиц;

4) для пояснения решения задачи там, где это нужно, аккуратно сделать чертеж;

5) решение задачи и используемые формулы должны сопровождаться пояснениями;

6) в пояснениях к задаче необходимо указывать те основные законы и формулы, на которых базируется решение данной задачи;

7) при получении расчетной формулы для решения конкретной задачи приводить ее вывод;

8) задачу рекомендуется решить сначала в общем виде, т. е. только в буквенных обозначениях, поясняя применяемые при написании формул буквенные обозначения;

9) вычисления следует проводить с помощью подстановки заданных числовых величин в расчетную формулу. Все необходимые числовые значения величин должны быть выражены в системе СИ (см. справочные материалы);

10) проверить единицы полученных величин по расчетной формуле и тем самым подтвердить ее правильность;

11) константы физических величин и другие справочные данные выбирать из таблиц.

#### Номера задач к контрольной работе № 4

Вариант	Номера задач									
	401	411	421	431	441	451	461	471	481	491
1	401	411	421	431	441	451	461	471	481	491
2	402	412	422	432	442	452	462	472	482	492
3	403	413	423	433	443	453	463	473	483	493
4	404	414	424	434	444	454	464	474	484	494
5	405	415	425	435	445	455	465	475	485	495
6	406	416	426	436	446	456	466	476	486	496
7	407	417	427	437	447	457	467	477	487	497
8	408	418	428	438	448	458	468	478	488	498
9	409	419	429	439	449	459	469	479	489	499
10	410	420	430	440	450	460	470	480	490	500

Контрольные работы, оформленные без соблюдения указанных правил, а также работы, выполненные не по своему варианту, не зачитывают.

При отсылке работы на повторное рецензирование обязательно представлять работу с первой рецензией.

## Рабочая программа раздела «Атомная физика»

Противоречия классической физики. Излучение черного тела. Закон Кирхгофа. Закон Стефана-Больцмана. Закон смещения Вина. Квантовая гипотеза Планка. Формула Планка для теплового излучения.

Фотоэлектрический эффект. Законы фотоэффекта. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Импульс фотона. Давление света. Эффект Комптона.

Экспериментальное обоснование основных идей квантовой механики. Линейчатые спектры атомов. Модель атомов по Резерфорду и Бору. Теория Бора для атомного ядра водорода.

Гипотеза де Бройля. Дифракция электронов. Соотношения неопределенностей Гейзенберга. Уравнение Шредингера для стационарных состояний. Статистический смысл волновой функции.

Частица в прямоугольной потенциальной яме. Решение уравнения Шредингера. Собственные волновые функции и энергетический спектр. Потенциальный барьер. Туннельный эффект.

Атом водорода в квантовой механике. Частица в сферическом симметричном поле. Квантовые числа. Пространственное распределение плотности вероятности для электрона в атоме водорода. Спин электрона. Принцип Паули. Периодическая система элементов Менделеева.

Зонная структура энергетического спектра электронов твердого тела. Заполнение зон: металлы, диэлектрики и полупроводники. Распределение Ферми. Уровень Ферми. Вырождение электронного газа в металлах.

Электропроводность металлов. Температурная зависимость. Явление сверхпроводимости. Понятие высокотемпературной сверхпроводимости.

Электропроводность полупроводников. Понятие дырочной проводимости. Температурная зависимость электропроводности. Собственные и примесные полупроводники. Электронный и дырочный полупроводник. Донорные и акцепторные энергетические уровни. Уровень Ферми в полупроводниках.

Контакт электронного и дырочного полупроводников. Потенциальный барьер p-n перехода. Вольтамперная характеристика полупроводникового диода. Транзистор.

Строение атомного ядра. Дефект массы. Энергия связи. Модели ядра. Природа ядерных сил.

Радиоактивное излучение и его виды. Приборы для регистрации радиоактивных излучений и частиц. Закон радиоактивного распада. Закономерности  $\alpha$ -распада и  $\beta$ -распада.

Ядерные реакции. Превращение ядер. Реакция деления ядер. Цепная реакция деления. Ядерный реактор. Термоядерный синтез. Энергия звезд. Управляемый термоядерный синтез.

# Основы атомной физики

Данный раздел предполагает краткое изложение вопросов теоретического курса, которые необходимы для решения задач, приведенных в конце настоящего пособия.

## 1. Квантовая физика

Возникновение в семнадцатом веке механики Ньютона ознаменовало появление физики как науки. Ньютон создал физическую картину, в которой движение тел подчиняется законам механики. Долгое время считалось, что механика Ньютона может дать теоретическое объяснение любых явлений. Однако постепенно выявлялись границы применимости классической механики. Прежде всего, в рамки классической механики не укладывались электрические и магнитные явления. Изучение этих явлений привело к созданию классической теории электромагнетизма – электродинамики. Дж. Максвеллу удалось объединить все знания в этой области, создав систему уравнений. Из электромагнитной теории Максвелла следовал важный вывод: что свет представляет собой электромагнитную волну. В рамках данной теории удалось объяснить в общих чертах все явления, связанные с распространением света. Но со временем электромагнитная теория света достигла границ, за которыми она становится неприменимой. Серьезным поражением явилась попытка применения классической теории к проблеме теплового излучения. Именно при изучении законов теплового излучения произошел переход от классической физики к квантовой физики.

### Тепловое излучение

Хорошо известно, что все твердые тела, нагретые до высокой температуры, накаляются и начинают испускать видимый свет. Излучение представляет собой электромагнитные волны различных частот. Измерения показывают, что излучение происходит и при более низких температурах. По мере понижения температуры уменьшается интенсивность излучения и меняется распределение излученной энергии по частотам. При температуре порядка  $800^\circ\text{C}$  тела излучают энергию в основном в виде красных и инфракрасных лучей, невидимых глазом. Излучение, испускаемое нагретыми телами, называется тепловым.

Каждое тело одновременно не только испускает, но и поглощает тепловое излучение. Опытным путем установлено, что чем больше энергии тело излучает при некоторой температуре, тем больше оно поглощает падающую на него энергию, излученную другими телами при той же температуре.

Для количественной оценки теплового излучения вводят следующие характеристики.

**Поток энергии**  $F$  ( мощность излучения) – количество энергии, излучаемое в единицу времени со всей поверхности тела.

**Энергетическая светимость  $R$**  (интегральная испускательная способность) тела – физическая величина, численно равная энергии, излучаемой в единицу времени с единицы площади поверхности тела (энергия электромагнитных волн всевозможных частот (или длин волн) от 0 до  $\infty$ ). Энергетическая светимость тела связана с потоком энергии  $F$  выражением:

$$R = \frac{\Phi}{S},$$

где  $S$  – площадь излучающей поверхности тела. Энергетическая светимость тела измеряется в системе СИ - Вт/м<sup>2</sup>.

Энергетическая светимость тела является интегральной характеристикой, которая не позволяет судить о том, как распределена энергия излучения по различным частотам (или длинам волн). Распределение энергии теплового излучения по частотам  $\nu$  (или длинам волн  $l$ ) характеризуют **спектральной плотностью энергетической светимости (испускательной способностью)** тела  $R_\nu$  (или  $R_l$ ). Величина  $R_\nu$  определяется следующим образом. Выберем некоторую частоту  $\nu$  и элементарный интервал частот  $d\nu$  вблизи частоты  $\nu$ . Если энергию  $dR$ , излучаемую в единицу времени с единицы площади поверхности тела в этом частотном интервале от  $\nu$  до  $\nu+d\nu$  поделить на ширину интервала частот  $d\nu$ , то получим энергию, излучаемую в единицу времени с единицы площади поверхности тела в единичном частотном интервале, которую и называют **спектральной плотностью энергетической светимости**. Другими словами, данная величина  $R_\nu$  представляет собой энергетическую светимость тела в интервале частот (или длин волн) единичной ширины:

$$R_\nu = \frac{dR}{d\nu} \text{ или } R_l = \frac{dR}{dl}. \quad (1.1)$$

Определим энергию  $dR$ , излучаемую в единицу времени с единицы площади поверхности тела в малом интервале частот  $d\nu$  вблизи частоты  $\nu$ . Из формулы (1.1) следует, что:  $dR_\nu = R_\nu \cdot d\nu$ .

Во всем частотном интервале от 0 до  $\infty$  энергия, излучаемая в единицу времени с единицы площади поверхности тела, т.е. энергетическая светимость тела, определится как:

$$R = \int_0^{\infty} R_\nu d\nu = \int_0^{\infty} R_l dl. \quad (1.2)$$

Если на тело падает внешнее излучение энергией  $dW_{\text{пад}}$  от других тел, то часть его отражается от поверхности тела, а часть энергии  $dW_{\text{погл}}$  проникает внутрь его и поглощается им. Доля всей падающей энергии в интервале частот от  $\nu$  до  $\nu+d\nu$ , которая поглощается телом, называется **спектральной поглощательной способностью** тела  $A_\nu$ :

$$A_\nu = \frac{dW_{\text{погл}}}{dW_{\text{пад}}} \leq 1$$

Тело, которое способно полностью поглощать все падающее на него излучение любой частоты, называется **абсолютно черным телом**. Для абсолютно черного тела  $A_n=1$ .

Абсолютно черных тел в природе нет, но сажа, платиновая чернь, черный бархат по своим свойствам близки к ним. Моделью абсолютно черного тела является замкнутая полость с небольшим отверстием, внутренняя поверхность которой зачернена. Луч света (электромагнитного излучения), попавший внутрь такой полости, испытывает многократные отражения от стенок, в результате чего интенсивность вышедшего излучения оказывается практически равной нулю.

### Законы теплового излучения

В 1859 г. Кирхгоф установил закон, носящий его имя, который определяет соотношение между спектральной плотностью энергетической светимости тела  $R_\nu$  и спектральной поглощательной способностью  $A_\nu$  тела. Согласно **закону Кирхгофа**, отношение спектральной плотности энергетической светимости к спектральной поглощательной способности тела не зависит от природы тела; оно является для всех тел универсальной функцией частоты (длины волны) и температуры:

$$\frac{R_n}{A_n} = r_n(n, T) \quad \text{или} \quad \frac{R_l}{A_l} = r_l(l, T). \quad (1.3)$$

Так как для абсолютно черного тела  $A_\nu = 1$ , то для него закон Кирхгофа будет

иметь вид: 
$$\frac{R_{\nu, \text{черн}}}{1} = r_\nu(\nu, T).$$

Отсюда видно, что универсальная функция  $r_n(n, T)$  (или  $r_l(l, T)$ ) есть спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела, ее называют функцией Кирхгофа.

Из закона Кирхгофа следует, во-первых, что спектральная плотность энергетической светимости любого тела, равная  $R_n = A_n \cdot R_{n, \text{черн}}$ , в любой области спектра всегда меньше спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела  $R_{n, \text{черн}}$  в той же области спектра, т.к. если тело не является абсолютно черным, то  $A_n < 1$  и, следовательно,  $R_n < R_{n, \text{черн}}$ . Во-вторых, из формулы (1.3) вытекает, что если тело не поглощает каких-либо лучей ( $A_n = 0$ ), то оно их и не излучает ( $R_\nu = 0$ ). Это объясняет цвет вещества.

Стефаном и Больцманом установлена зависимость энергетической светимости абсолютно черного тела от абсолютной температуры.

Это соотношение называется **законом Стефана-Больцмана**, который гласит, что энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры:

$$R = sT^4. \quad (1.4)$$

Коэффициент пропорциональности  $s$  (постоянная Стефана-Больцмана) равен  $s = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ .

Дальнейшие исследования сводились к выяснению вида функции Кирхгофа, т.е. спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела, которая изучалась экспериментально. Распределение энергии излучения абсолютно черного тела было изучено на опыте. На рис.1.1 представлена зависимость спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела от длины волны для различных температур. Такая зависимость называется **спектром теплового излучения**.

Площадь, ограниченная каждой кривой и осью абсцисс, определяет полную энергию, испускаемую за единицу времени с единицы площади поверхности абсолютно черного тела во всем интервале длин волн (или частот), т.е. его энергетическую светимость. Как видно из графика, эта площадь быстро растет с увеличением температуры. Эта особенность отражается в законе Стефана-Больцмана, согласно которому энергетическая светимость пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры.

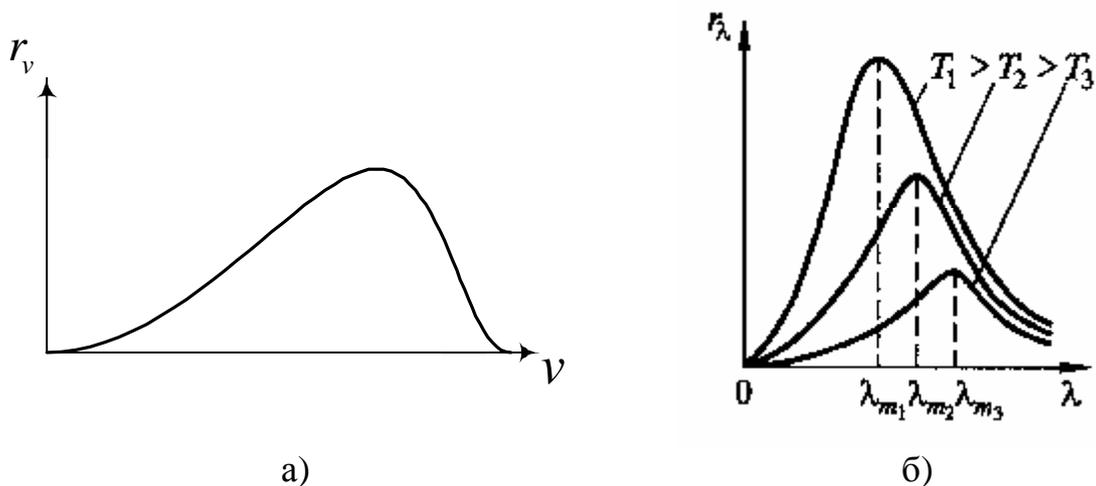


Рис.1.1. Зависимость спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела: а) от частоты; б) от длины волны для различных температур

Экспериментальные кривые, приведенные на рис.1.1б, показывают простую зависимость длины волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела  $r_l$  от абсолютной температуры. Чем больше температура, тем меньше длина волны, на которую приходится максимум спектра  $r_l(I, T)$ . Эта зависимость была обнаружена немецким ученым Вином и носит название **закон смещения Вина**:

$$l_m = \frac{b}{T}, \quad (1.5)$$

где  $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$  – постоянная Вина.

Согласно **закону смещения Вина**, длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела, обратно пропорциональна абсолютной температуре.

Значение максимума спектральной плотности энергетической светимости  $(r_l)_{\max}$ , согласно **второму закону Вина**, пропорционально пятой степени абсолютной температуры:

$$(r_l)_{\max} = CT^5, \quad (1.6)$$

где постоянная  $C$  равна –  $C = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5)$ .

Для объяснения опытных законов теплового излучения необходимо было получить аналитически из основных законов классической физики вид функции  $r_n(n, T)$  (рис.1.1а) (или  $r_l(l, T)$  (рис.1.1б)).

Попытки, предпринятые Рэлеем и Джинсом, привели к тому, что удалось объяснить длинноволновую (или низкочастотную) часть спектра. В его коротковолновой части (области высоких частот) формула Рэля-Джинса дает резкое возрастание функции  $r_n(n, T)$ , что не согласуется с экспериментальными данными (рис. 1.2). Данное противоречие между строгой логически завершенной теорией излучения абсолютно черного тела, созданной на основе классических представлений, с опытом в области высоких частот было названо «ультрафиолетовой катастрофой».

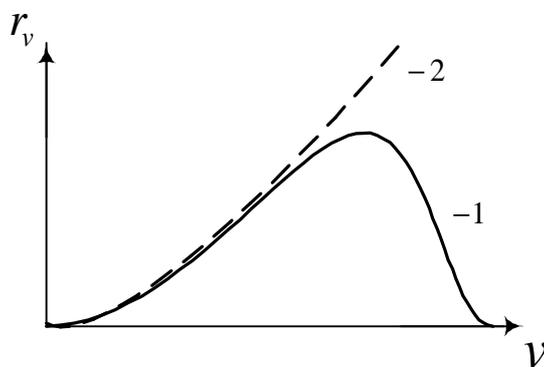


Рис.1.2. Зависимость спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела от частоты:

1- экспериментальная кривая; 2- по формуле Рэля-Джинса

Таким образом, в рамках классической физики объяснить законы распределения энергии в спектре черного тела не удалось. Выход был найден Максом Планком в 1900 г. В классической физике испускание излучения телом рассматривается как непрерывный процесс, при котором тело непрерывно излучает в пространство электромагнитные волны. Аналогично рассматривается и процесс поглощения. Электромагнитные волны, падающие на тело, непрерывно им поглощаются.

Эти представления были Планком пересмотрены. Он выдвинул гипотезу, согласно которой тело излучает энергию не непрерывно, а определенными порциями – квантами, причем энергия кванта пропорциональна частоте излученных волн:

$$E_0 = hn = \frac{hc}{\lambda}. \quad (1.7)$$

Коэффициент пропорциональности между энергиями и частотой называется постоянной Планка:  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с.

Так как излучение испускается порциями, то энергия  $E$ , излученная телом, может принимать лишь определенные дискретные значения, кратные целому числу элементарных порций энергии  $E_0$ :

$$E = n \cdot hv,$$

где ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Квантовая гипотеза Планка позволила ему получить формулу, по которой можно рассчитать спектральную плотность энергетической светимости абсолютно черного тела.

Спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела  $r_l(I, T)$  как функция длины волны определяется выражением:

$$r_l = \frac{2phc^2}{I^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}. \quad (1.8)$$

Зависимость спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела  $r_n(n, T)$  от частоты:

$$r_v = \frac{2phv^3}{c^2} \frac{1}{e^{hv/kT} - 1}. \quad (1.9)$$

Формулы (1.8) и (1.9) называются **формулами Планка**.

График функций (1.9) и (1.8), полученных Планком, полностью совпадает с экспериментальными кривыми, приведенными на рисунках 1.1а. и 1.1б.

Из формулы Планка можно получить законы теплового излучения Стефана-Больцмана и смещения Вина.

Если проинтегрировать функцию (1.9) по всем частотам от 0 до  $\infty$ , то по формуле (1.2) получим энергетическую светимость абсолютно черного тела  $R$ . Величина  $R$  будет пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры. Коэффициент пропорциональности между  $R$  и  $T^4$  будет представлять собой постоянную Стефана-Больцмана  $\sigma$ .

Закон смещения Вина получится при исследовании функции (1.9)  $r_l(I, T)$  на экстремум относительно длины волны  $\lambda$ . Для этого надо взять производную

функции  $r_l(\lambda, T)$  по  $l$  и приравнять ее к нулю:  $\frac{dr_l}{dl} = 0$ . Решая это уравнение,

получим значение длины волны  $l_{\text{макс}}$ , на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела. Величина  $l_{\text{макс}}$  будет обратно пропорциональна абсолютной температуре, что подтверждает закон Вина.

Идея Планка о прерывном характере процессов излучения оказала огромное влияние на все дальнейшее развитие физики. В классической физике считалось незыблемым, что все физические величины могут принимать любые значения и могут изменяться непрерывно. Гипотеза Планка означала отказ от классических представлений непрерывности процессов.

### **Фотоэффект**

Дальнейшее развитие идеи дискретности электромагнитного излучения получило при объяснении закономерностей явления фотоэффекта.

Явление **внешнего фотоэффекта** (фотоэлектронная эмиссия) заключается в испускании электронов веществом под действием электромагнитного излучения. Электроны, испускаемые веществом, называются **фотоэлектронами**, а электрический ток, образуемый ими при упорядоченном движении во внешнем электрическом поле, называется **фототоком**. Фотоэффект открыт Герцем в 1887 г. Более фундаментальные исследования были выполнены А.Г. Столетовым в 1887-1888 гг. Принципиальная схема для исследования фотоэффекта представлена на рис.1.3. В вакуумной трубке помещены две металлические пластины – катод и анод, соединенные с источником тока (И). Величина напряжения между электродами измеряется с помощью вольтметра (V). Для измерения фототока в цепь включен микроамперметр (А). Падающий на поверхность катода свет вырывает электроны. Попадая в электрическое поле, фотоэлектроны ускоряются в направлении анода. Тем самым электрическая цепь замыкается. Изменяя напряжение между электродами и измеряя фототок в цепи микроамперметром, получим вольт-амперную характеристику фотоэффекта – зависимость фототока  $I$ , образуемого потоком электронов, испускаемых катодом под действием света от напряжения  $U$  между электродами.

Такая зависимость приведена на рис. 1.3, б. За счет эмиссии вокруг катода образуется электронное облако. По мере увеличения напряжения  $U$  фототок  $I$  постепенно возрастает, т.к. увеличивается число фотоэлектронов, покидающих облако и достигающих анода. При некотором значении  $U$  электронное облако исчезает и все электроны, испускаемые катодом, достигают анода. При дальнейшем увеличении напряжения фототок возрастать не может (при данном освещении и данной температуре катода). Максимальное значение тока при данных условиях называется фототоком насыщения  $I_n$ :

$$I_n = \frac{q}{t} = \frac{Ne}{t},$$

где  $e$  – заряд электрона;  $N$  – число электронов, достигнувших анода за время  $t$ .

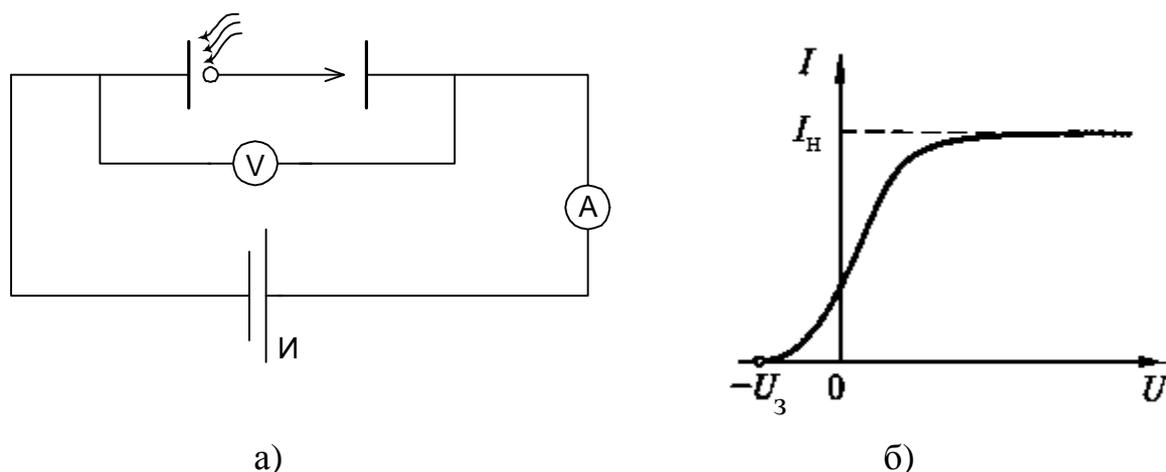


Рис.1.3. Схема экспериментальной установки для исследования внешнего фотоэффекта (а); зависимость фототока от напряжения между электродами (б)

Следует заметить, что при  $U = 0$  фототок не равен нулю, так как часть электронов, вылетающих из катода, имеет достаточную кинетическую энергию, чтобы достигнуть анода без внешнего поля. При обратной полярности напряжения, когда на катод подается плюс, а на анод минус, электростатическое поле между электродами будет тормозить электроны. Если электрон обладает достаточной начальной кинетической энергией, чтобы совершить работу против сил задерживающего электростатического поля, то он достигнет анода. Для того чтобы фототок стал равен нулю, необходимо, чтобы обратное напряжение имело определенную величину, называемую **задерживающим напряжением**  $U_3$  (рис. 1.3, б), при котором работа электростатического поля по торможению электронов  $A = eU_3$  равна начальной кинетической энергии вылетающих из вещества фотоэлектронов:

$$eU_3 = E_{кин}. \quad (1.10)$$

Столетовым опытным путем установлены три закона внешнего фотоэффекта:

1. При фиксированной частоте падающего света число фотоэлектронов, вырываемых из катода в единицу времени, пропорционально интенсивности света ( сила фототока насыщения пропорциональна потоку энергии света, падающему на катод).
2. Скорость фотоэлектронов ( и соответственно, кинетическая энергия электронов) не зависит от интенсивности падающего света, а определяется только его частотой  $\nu$ .
3. Для каждого вещества существует " красная граница" фотоэффекта, т.е. минимальная частота света  $\nu_{кр}$  (зависящая от химической природы вещества и

состояния его поверхности), при которой еще возможен фотоэффект (фотоэффект наблюдается только при  $\nu \geq \nu_{кр}$ ).

Если первый закон внешнего фотоэффекта еще можно объяснить с помощью классической волновой теории излучения, то второй и третий законы Столетова противоречат ей. Согласно волновой теории света, при увеличении интенсивности падающего на катод излучения, независимо от его длины волны, должны расти величина силы фототока и энергия выбиваемых электронов. Однако растет только сила фототока, о чем и говорит первый закон. Самым неожиданным результатом, с точки зрения классической физики, стал тот факт, что если  $\nu < \nu_{кр}$ , то ни при какой интенсивности света, падающего на катод, электроны не покидают пределы атома. Для объяснений этих противоречий требовалась новая теория.

Выход был найден Эйнштейном в 1905 г. Развивая идею Планка, Эйнштейн предположил, что электромагнитное излучение не только излучается в виде квантов, но и распространяется, и поглощается также в виде квантов энергии - **фотонов**. При фотоэффекте передача энергии электрону соответствует поглощению одного кванта энергии электромагнитного поля (1.7):

$$E_0 = h\nu = hc/\lambda.$$

Часть энергии поглощенного фотона электрон тратит на то, чтобы покинуть пределы металла. Минимальная энергия, затраченная электроном для того, чтобы покинуть пределы металла, называется работой выхода электрона  $A_{вых}$  из металла. Оставшаяся часть энергии фотона составляет кинетическую энергию электрона  $E_{кин}$ . Закон сохранения энергии для фотоэффекта выглядит следующим образом: энергия электромагнитного излучения  $h\nu$  равна работе выхода электрона  $A_{вых}$  из металла плюс его кинетической энергии:

$$h\nu = A_{вых} + E_{кин}. \quad (1.11)$$

Формула (1.11) называется **уравнением Эйнштейна для внешнего фотоэффекта**.

Таким образом, согласно квантовой теории, излучение, падающее на катод, состоит из квантов  $h\nu$ , которые поглощаются электронами. Если энергия кванта  $h\nu$  меньше работы выхода электрона из металла  $A_{вых}$ , то какой бы интенсивностью не обладало излучение, электроны не смогут покинуть пределы металла и фотоэффекта не будет (третий закон Столетова). Минимальная частота (максимальная длина волны), при которой возможен фотоэффект, соответствует  $E_{кин}=0$  и определяет красную границу фотоэффекта:  $h\nu_{кр} = A_{вых}$ , откуда

$$\nu_{кр} = \frac{A_{вых}}{h} \text{ и } \lambda_{кр} = \frac{hc}{A_{вых}}. \quad (1.12)$$

Если энергии кванта достаточно, чтобы электрон смог покинуть пределы металла ( $h\nu$  больше работы выхода электрона из металла  $A_{\text{вых}}$ ), то оставшаяся часть энергии поглощенного кванта составит кинетическую энергию электрона.

Из уравнения (1.11) вытекает, что кинетическая энергия вылетающих электронов зависит только от химической природы катода ( $A_{\text{вых}}$ ) и от частоты (длины волны) излучения и не зависит от интенсивности излучения (второй закон Столетова).

Первый закон фотоэффекта с точки зрения квантовой теории объясняется тем, что при увеличении интенсивности падающего на катод излучения растет число поглощаемых металлом квантов и, соответственно, число покидающих поверхность катода электронов. Поэтому величина силы фототока пропорциональна интенсивности излучения.

При решении задач по теме «Фотоэффект» необходимо помнить, что выражение кинетической энергии вылетающих электронов различается в зависимости от величины скорости. Если скорость электронов значительно меньше скорости света в вакууме ( $v \ll c$ ), то этот случай называется нерелятивистским, а кинетическая энергия и скорость фотоэлектрона связаны классическим соотношением:  $E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2}$ .

Закон сохранения энергии для фотоэффекта (1.11) примет следующий вид:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{mv^2}{2}. \quad (1.13)$$

Если скорость электронов соизмерима со скоростью света в вакууме ( $v \ll c$ ), то этот случай называется релятивистским, кинетическая энергия фотоэлектрона связана с его скоростью релятивистским соотношением:

$$E_{\text{кин}} = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (1.14)$$

Различие между релятивистским и нерелятивистским случаями определяется сравнением энергии кванта электромагнитного излучения  $h\nu$  с энергией покоя электрона  $m_0 c^2$ .

Если энергия электромагнитного излучения меньше энергии покоя электрона:  $h\nu \ll m_0 c^2 = 8,2 \cdot 10^{-14}$  Дж = 0,51 МэВ, то данный случай является нерелятивистским и при решении задачи необходимо воспользоваться формулой (1.13).

Если энергия электромагнитного излучения соизмерима с энергией покоя электрона:  $h\nu \approx m_0 c^2 = 8,2 \cdot 10^{-14}$  Дж = 0,51 МэВ, то работой выхода в уравнении Эйнштейна можно пренебречь, т.к. она составляет несколько электрон-вольт,

$h\nu = E_{кин}$ , где кинетическая энергия фотоэлектрона, определяемая формулой (1.14), приравнивается энергии кванта.

Кроме внешнего фотоэффекта наблюдается **внутренний фотоэффект**. При внешнем фотоэффекте электрон, поглотив квант электромагнитного излучения, покидает пределы металла. Если в результате поглощения фотона электрон покидает пределы атома, но не выходит за пределы вещества, то такое явление называется **внутренним фотоэффектом**. Внутренний фотоэффект приводит к увеличению числа свободных электронов, способных участвовать в механизме электропроводности полупроводника или диэлектрика.

### Давление света. Эффект Комптона

Фотоэффект показал, что свет можно представить как поток особых частиц, фотонов. Фотон отличается от других микроскопических частиц тем, что он не имеет массы покоя и существует только в движении. Поскольку фотон обладает энергией (1.7), то согласно теории относительности Эйнштейна, он обладает и массой:

$$E = mc^2, \quad (1.15)$$

где  $c$  - скорость света в вакууме (она же скорость движения фотона).

Объединив формулы (1.7) и (1.15),  $E = h\nu = mc^2$ , получим выражение для массы фотона:

$$m = \frac{h\nu}{c^2} \quad \text{или} \quad m = \frac{h}{c\lambda}. \quad (1.16)$$

Так как фотон подобен частице, т.е. обладает массой и скоростью, то он обладает и импульсом. Согласно теории относительности Эйнштейна, связь между энергией частицы с его импульсом определяется формулой

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2},$$

где  $m_0$  - масса покоя частицы. Для фотона масса покоя равна нулю и импульс определится как

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = mc. \quad (1.17)$$

Экспериментальным доказательством наличия у фотонов импульса является световое давление, которое оказывает падающее на тело излучение. С точки зрения квантовой теории, давление света на поверхность тела обусловлено тем, что каждый фотон при соударении с поверхностью передает ей свой импульс подобно тому, как давление идеального газа есть результат передачи импульса молекул стенкам сосуда.

Пусть поток монохроматического излучения частоты  $\nu$  падает перпендикулярно поверхности. Пусть за время  $1$  с на  $1$  м<sup>2</sup> поверхности тела падает  $N$  фотонов при коэффициенте отражения света  $\rho$  от поверхности тела. Часть фотонов, равная  $\rho N$ , отразится от поверхности тела, а часть, равная

$(1-\rho)N$ , поглотится. Каждый поглощенный фотон передает поверхности импульс  $p = hv/c$ , а каждый отраженный -  $2p = 2hv/c$  (так как при отражении от поверхности импульс фотона меняется на обратный, при этом изменение импульса фотона равно  $\Delta p = p - (-p) = 2p$ ). Давление света  $P$  на поверхность численно равно импульсу, который передают единице поверхности за единицу времени (1 с)  $N$  фотонов (отраженные и поглощенные):

$$P = P_{отр} + P_{погл} = \rho N \cdot 2hv/c + (1 - \rho)N \cdot hv/c = (1 + \rho)N \cdot hv/c, \quad (1.18)$$

Поскольку  $Nhv$  есть энергия всех фотонов, падающих на  $1 \text{ м}^2$  в 1 с, т. е. интенсивность света  $I$ , то формула для давления света (1.18) может быть записана:

$$P = (1 + r) \frac{I}{c}.$$

С учетом того, что  $\frac{I}{c} = w$  - объемная плотность энергии излучения, то окончательное выражение для давления света имеет вид:

$$P = (1 + r) \frac{I}{c} = (1 + r)w. \quad (1.19)$$

Эта формула, выведенная на основе квантовых представлений, совпадает с выражением, полученным из электромагнитной (волновой) теории Максвелла. Таким образом, давление света одинаково успешно объясняется и волновой, и квантовой теориями.

Экспериментальное доказательство существования светового давления на твердые тела и газы были получены в опытах П.Н. Лебедева в 1899 г.

Еще одно явление, подтверждающее квантовую природу электромагнитного излучения, было открыто в 1922-1923 гг. Комптоном и названо его именем. Он исследовал рассеяние рентгеновского излучения легкими веществами – графитом, парафином и др. Комптон обнаружил, что рассеянные рентгеновские лучи имеют длину волны  $\lambda'$  большую, чем длина волны  $\lambda$  падающих лучей. Оказалось, что разность длин волн  $(\lambda' - \lambda)$  зависит только от величины угла рассеяния  $q$  и не зависит от свойств рассеивающего вещества и длины волны  $\lambda$  падающего излучения:

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos q) = \lambda_c (1 - \cos q),$$

где через  $\lambda_c$  обозначена величина  $\frac{h}{m_0 c} = 2,42 \cdot 10^{-12} \text{ м}$  – так называемая комптоновская длина волны ( $m_0$  – масса покоя электрона,  $c$  – скорость света,  $h$  – постоянная Планка).

Явление Комптона не укладывается в рамки волновой теории света. Согласно этой теории, электромагнитная волна, проникая в вещество,

взаимодействует со свободными электронами атомов ( для легких атомов электроны слабо связаны с ядрами, поэтому их можно считать свободными) и вынуждает их совершать колебания с той же частотой ( длиной волны), с которой изменяется электрический вектор падающей волны. Совершающие колебания электроны сами становятся источником электромагнитных волн той же длины волны. Следовательно, по классической теории изменения частоты (длины волны) в явлении Комптона быть не должно. Противоречие между опытом и теорией удалось устранить предположением, что рентгеновское излучение имеет корпускулярную природу, т.е. представляет собой поток фотонов. С квантовой точки зрения Эффект Комптона является результатом упругого столкновения двух частиц: налетающего фотона (имеющего импульс  $\vec{p}_g$ ) с покоящимся электроном (рис.1.4). Фотон, столкнувшись с электроном, отдает ему часть своей энергии и импульса в соответствии с законами их сохранения и изменяет направление своего движения. На рисунке 1.4 обозначения  $\vec{p}_{g'}$  и  $\vec{p}_e$  соответствуют импульсу рассеянного фотона и импульсу электрона после соударения. Уменьшение энергии фотона и означает увеличение длины волны рассеянного излучения.

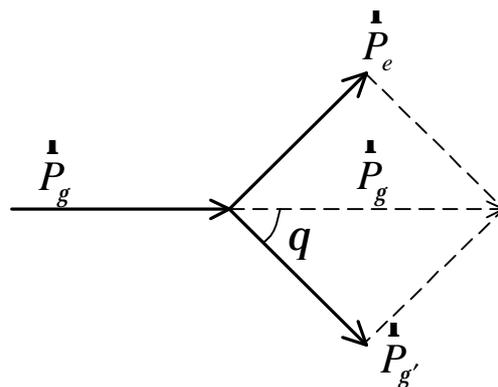


Рис.1.4. Эффект Комптона

### Атом водорода

Квантовая гипотеза Планка и гипотеза Эйнштейна явились первыми шагами формирования квантовой физики, которая смогла объяснить многие явления, необъяснимые с точки зрения классической физики. Следующий важный этап в познании микромира оказался связанным с проблемой атома. Первые опыты, позволившие составить ясное представление о строении атома, были поставлены в 1911 г. английским физиком Резерфордом. Резерфорд исследовал структуру атома, бомбардируя его  $\alpha$ -частицами, испускаемыми радиоактивными веществами. Узкий пучок  $\alpha$ -частиц попадал на фольгу из золота перпендикулярно ее поверхности. Атомы фольги должны были изменять направление движения  $\alpha$ -частиц, т.е. рассеивать их по разным направлениям. Результаты этих опытов показали, что большинство  $\alpha$ -частиц при прохождении фольги сохраняли прежнее направление или отклонялись на очень малые углы.

Но в опытах были зарегистрированы отдельные  $\alpha$ -частицы (приблизительно одна на 8000), которые рассеивались на очень большие углы (порядка  $180^\circ$ ). Сама  $\alpha$ -частица представляет собой ядро гелия (два протона, два нейтрона), и ее масса примерно в 7600 раз больше массы электрона. Объяснить резкие отклонения небольшого количества  $\alpha$ -частиц возможно только предположением, что на своем пути они встречают более массивную положительно заряженную (как и они сами) частицу, причем ее размер намного меньше размера атома. Это вытекает из того факта, что большинство  $\alpha$ -частиц пронизывает плотную упаковку атомов фольги практически без отклонения.

На основе полученных результатов Резерфорд предложил ядерную (планетарную) модель атома. Согласно этой модели, в центре атома находится положительно заряженное ядро с зарядом  $+Ze$ , в котором сосредоточена почти вся масса атома. Размеры ядра ( $\approx 10^{-15}$  м) намного меньше размеров атома ( $\approx 10^{-10}$  м). Вокруг массивного ядра под действием кулоновских сил движутся по замкнутым орбитам  $Z$  электронов, общий отрицательный заряд которых равен положительному заряду ядра. Таким образом, созданная Резерфордом модель строения атома выглядит подобно строению солнечной системы, где вокруг массивного солнца по замкнутым орбитам движутся сравнительно легкие планеты.

Рассмотрим ядерную модель простейшего атома – атома водорода, состоящего из одного электрона и ядра – протона. Предположим, что электрон движется по круговой орбите радиусом  $r$  со скоростью  $v$ . При этом всегда движение будет с центростремительным ускорением  $\frac{v^2}{r}$ . Силой, удерживающей электрон на орбите, является кулоновская сила его притяжения к ядру:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}, \quad (1.20)$$

где  $e$  – заряд электрона и ядра,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – электрическая постоянная,  $r$  – радиус орбиты электрона.

Уравнение Ньютона движения электрона по орбите будет иметь вид:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2 m}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (1.21)$$

При всей своей прогрессивности модель атома Резерфорда оказалась в противоречии с классической электродинамикой. Во-первых, электрон движется вокруг ядра с центростремительным ускорением. А, согласно классической электродинамике, заряд, движущийся с ускорением, должен излучать электромагнитные волны, которые уносят его энергию. Следовательно, электрон через некоторое время ( $10^{-11}$  с) должен упасть на ядро, чего в действительности не происходит. Ядерная модель атома, предложенная Резерфордом, является неустойчивой, что противоречит опыту.

Второе противоречие между ядерной моделью атома и классической физики относится к спектру излучения атома. В модели Резерфорда радиус орбиты электрона может быть произвольным. Это следует из того, что уравнение (1.21) содержит два неизвестных  $\nu$  и  $r$ . Эти величины могут меняться непрерывно, и атом должен испускать электромагнитное излучение на всех длинах волн в интервале от 0 до  $\infty$ . То есть спектр излучения атома должен быть непрерывным.

Однако еще с конца XIX в. было известно, что спектры излучения атомов дискретные (линейчатые), т.е. излучение происходит только при определенном наборе частот.

Швейцарский ученый Бальмер в 1885 г. установил простую закономерность, которой подчиняются частоты излучений атома водорода. Он обнаружил, что частоты излучения  $\nu$  (а также длины волн  $l$ ) видимой части спектра могут быть вычислены по формуле

$$\nu = \frac{c}{l} R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (1.22)$$

где  $R = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$  – постоянная Ридберга;  $c$  – скорость света в вакууме;  $m$  – целое число, принимающее значение 3,4,5, ... .

Кроме линий серии Бальмера, расположенных в видимой части спектра у водорода, были обнаружены другие серии частот спектральных линий, находящихся в невидимой для человеческого глаза области.

В ультрафиолетовой части спектра была обнаружена *серия Лаймана*:

$$\nu = \frac{c}{l} R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad m = 2, 3, 4, \dots$$

В инфракрасной были обнаружены несколько серий, начиная с *серии Пашена*:

$$\nu = \frac{c}{l} R \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad m = 4, 5, 6, \dots$$

Все эти серии можно представить общей формулой, называемой *обобщенной формулой Бальмера*:

$$\nu = \frac{c}{l} R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (1.23)$$

где  $R = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$  – постоянная Ридберга,  $m = (n+1, n+2, \dots)$ . Целое число  $n$  принимает следующие значения:  $n=1$  для серии Лаймана,  $n=2$  для серии Бальмера,  $n=3$  для серии Пашена и т.д.

Объяснить эту закономерность планетарная модель Резерфорда не позволяла. Заменить ядерную модель атома другой моделью, которая не противоречила бы классической физике, не удалось.

Выход из этой ситуации был предложен 1913 г. Нильсом Бором. Бор принял за основу модель Резерфорда. Электроны он рассматривал как

классические частицы, движущиеся вокруг маленького, но массивного ядра под влиянием кулоновского притяжения. Однако вопреки законам классической физики Бор предложил существование стационарных орбит, находясь на которых электроны не излучают энергии. Эти положения он сформулировал в виде постулатов (положений, не требующих доказательств).

### Постулаты Бора

1. Существуют такие стационарные орбиты для электрона в атоме, движение по которым не сопровождается излучением. Для стационарных орбит выполняется условие

$$m_e v \cdot r = n \cdot \mathbf{h}, \quad (1.24)$$

где  $\mathbf{h} = \frac{h}{2\pi}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$  – квантовое число, соответствующее номеру орбиты.

Так как слева в равенстве (1.24) стоит момент импульса электрона ( $m_e v \cdot r$ ), то, иными словами, можно утверждать, что момент импульса электрона на стационарных орбитах может принимать только значения, кратные  $\mathbf{h}$ .

2. Излучение наблюдается только при переходе атома из одного состояния с энергией  $E_n$  в другое состояние с энергией  $E_m$ , причем в результате такого перехода энергия кванта излучения равна:

$$h\nu = \mathbf{h}\omega = E_n - E_m. \quad (1.25)$$

Введенное Бором правило квантования момента импульса электрона (1.24) дополнило формулу (1.21) в модели атома Резерфорда. Очевидно, что радиус орбиты и скорость (а значит и энергия) электрона уже не могут принимать любые значения. Появляется дискретный набор значений радиуса орбиты  $r_n$  и соответствующий ему дискретный набор значений энергии  $E_n$  – набор *энергетических уровней*, на которых может находиться электрон. То есть происходит квантование орбит и энергий в водородоподобном атоме. Из уравнения (1.24) можно выразить скорость  $v$  и, подставив в уравнение (1.21), получить радиус орбиты электрона:

$$v_n = \frac{n\mathbf{h}}{m_e r_n}, \quad r_n = \frac{n^2 h^2 e_0}{4\pi^2 m_e}. \quad (1.25)$$

Теперь можно определить энергию электрона  $E_n$  на стационарных орбитах. Она будет складываться из кинетической энергии  $E_{кин}$  и потенциальной энергии кулоновского взаимодействия электрона с ядром  $E_{пот}$ :

$$E_n = E_{кин} + E_{пот} = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi e_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi e_0 r} = -\frac{m_e e^4}{8e_0^2 h^2 n^2}. \quad (1.26)$$

При получении данной формулы воспользовались выражениями (1.21) и (1.25) для скорости и радиуса орбиты.

По второму постулату Бора можно определить энергию кванта, излучаемого при переходе электрона с орбиты номер  $n$  на орбиту номер  $m$ :

$$e = h\nu = E_n - E_m = \frac{e^4 m_e}{8e_0^2 h^2} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (1.27)$$

Очевидно, что самая близкая к ядру орбита – это орбита с  $n = 1$ , радиус которой  $r_1 = \frac{h^2 e_0}{pe^2 m_e} = 0,529 \cdot 10^{-10}$  м называют **первым боровским радиусом**.

Атом, у которого электрон находится на первой орбите, не может излучать энергию. Такое состояние является абсолютно устойчивым. Его еще называют **невозбужденным**, или **основным**. Все остальные состояния атома, при которых электрон находится на более дальних орбитах, являются неустойчивыми, так как атом стремится занять положение с наименьшей энергией. При переходе электрона на более низкие орбиты атом излучает квант энергии. Такие состояния называют **возбужденными** состояниями. Время существования электрона в возбужденном состоянии составляет порядка  $10^{-8}$  с.

Частота испускаемого или поглощаемого кванта будет определяться выражением:

$$\nu = \frac{E_n - E_m}{h} = \frac{e^4 m_e}{8e_0^2 h^3} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (1.28)$$

где  $R$  – константа, равная постоянной Ридберга. Для атома водорода это выражение полностью совпадает с обобщенной формулой Бальмера.

Отсюда возникает простое объяснение сериям спектральных частот, наблюдаемых в спектре атома водорода. Серия Лаймана – это результат переходов электронов с верхних энергетических уровней на первый; серия Бальмера – результат переходов на второй уровень; серия Пашена – на третий и так далее. На рис. 1.5 представлена схема энергетических уровней атома водорода, рассчитываемых согласно выражению (1.26). Схема показывает, что изменения энергии, соответствующей переходам на определенный энергетический уровень, существенно отличаются от изменений энергии, соответствующей переходам на другие энергетические уровни. Это объясняет объединение спектральных линий в отдельные серии.

Из выражения (1.26) и (1.25) следует, что при  $n = \infty$  полная энергия электрона равна нулю, а радиус орбиты стремится к бесконечности.

Это означает, что электрон освобождается от связи с атомом и покидает его. Если необходимо освободить электрон от связи с невозбужденным атомом, то необходим квант излучения с энергией равной:

$$E_{\text{ион}} = E_1 - E_\infty = \frac{e^4 m_e}{8e_0^2 h^2} \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty^2} \right) = \frac{e^4 m_e}{8e_0^2 h^2}. \quad (1.29)$$

Эта энергия называется **энергией ионизации**  $E_{\text{ион}}$ , так как атом, потерявший электрон, становится ионом. Для атома водорода  $E_{\text{ион}} = 13,53$  эВ. Это значение, полученное из боровской теории атома, находится в хорошем соответствии с

результатами эксперимента. Следует помнить, что если энергия кванта излучения, выбивающего электрон из атома, больше энергии ионизации, то остаток энергии передается выбитому электрону. Следовательно, кинетическая энергия выбитого электрона  $E_{кин}$  будет определяться выражением:

$$E_{кин} = h\nu - E_{ион}. \quad (1.30)$$



Рис.1.5. Схема энергетических уровней атома водорода

Таким образом, теория Бора явилась крупным шагом в развитии теории атома, в понимании новых квантовых закономерностей, с которыми столкнулась физика при изучении явлений микромира. Эта теория отчетливо показала неприменимость законов классической физики для описания внутриатомных явлений.

Однако двух постулатов Бора было недостаточно для построения полной теории. Правила квантования, достаточно искусственно введенные Бором для водородоподобного атома, не удалось распространить даже на простейший после водорода атом гелия, содержащий два электрона. Кроме того, теория Бора позволила вычислить только частоты спектральных линий, но не их интенсивность. Сам Бор рассматривал свою теорию как промежуточный этап в поисках верной теории. Такой теорией явилась квантовая механика.

## Длина волны Де-Бройля

*Диалектическое единство корпускулярных и волновых свойств электромагнитного излучения.*

Рассмотренные выше явления - излучение абсолютно черного тела, фотоэффект, эффект Комптона, линейчатые спектры излучения атомов служат доказательством квантовых (корпускулярных) представлений о свете как о потоке фотонов. С другой стороны, такие явления, как интерференция, дифракция и поляризация света, убедительно подтверждают волновую (электромагнитную) природу света. Наконец, давление света и преломление света объясняются как волновой, так и квантовыми теориями. Таким образом, электромагнитное излучение обнаруживает единство, казалось бы, взаимоисключающих свойств – непрерывных (волны) и дискретных (фотоны), которые взаимно дополняют друг друга.

Свойства непрерывности, характерные для электромагнитного поля световой волны, не следует противопоставлять свойствам дискретности, характерным для фотонов. Свет, обладая одновременно корпускулярно-волновыми свойствами, обнаруживает определенные закономерности в их проявлении. Так, волновые свойства света проявляются в закономерностях его распространения, интерференции, дифракции, поляризации, а корпускулярные – в процессах взаимодействия света с веществом. Чем больше длина волны, тем меньше энергия в импульсах фотона и тем труднее обнаруживаются квантовые свойства света (с этим связано, например, существование «красной границы» фотоэффекта). Наоборот, чем меньше длина волны, тем больше энергия и импульс фотона и тем труднее обнаруживаются волновые свойства света.

В 1924 г. де Бройль предложил распространить идею дуализма не только на фотоны – частицы света, но и вообще на все микрочастицы. Согласно де Бройлю, с каждым микрообъектом связываются, с одной стороны, корпускулярные характеристики – энергия  $\varepsilon$  и импульс  $p$ , а с другой – волновые характеристики – частота  $\omega$  и длина волны  $\lambda$ . Количественные соотношения, связывающие корпускулярные и волновые свойства частиц, такие же, как для фотонов:  $\varepsilon = h\nu$ ,  $p = h\nu/c = h/\lambda$  (см. формулу (1.17)).

Таким образом, любой частице, обладающей импульсом, сопоставляют волну, длина которой вычисляется по формуле де Бройля,

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (1.31)$$

где  $p$  – импульс частицы;  $h$  – постоянная Планка.

Для нерелятивистского случая, когда скорость частицы значительно меньше скорости света в вакууме ( $v \ll c$ ), длина волны де Бройля частицы, имеющей массу  $m$  и движущейся со скоростью  $v$  определится по формуле

$$\lambda = \frac{h}{mv}.$$

Для релятивистского случая, когда скорость частицы соизмерима со скоростью света ( $v \leq c$ ), кинетическая энергия  $E_k$  соизмерима с энергией покоя частицы  $E_0 = m_0c^2$ , импульс определяется релятивистской формулой

$$p = \frac{\sqrt{(2E_0 + E_k)E_k}}{c}. \quad (1.32)$$

Гипотеза де Бройля получила подтверждение впервые в 1927 г. в опытах К. Девиссона и Л. Джермера, и в дальнейшем в опытах П.С. Тартаковского и Г. Томсона, В.А. Фабриканта и др.

Пучок электронов, проходящий через кристаллическую решетку тонкой металлической фольги, дает отчетливую дифракционную картину. По положению максимумов и минимумов можно определить длину волны, которая полностью совпадает с формулой де Бройля.

Для микрочастицы существует потенциальная возможность проявить себя в зависимости от внешних условий: либо как волна, либо как частица. В этой потенциальной возможности различных проявлений свойств, присущих микрообъекту, и состоит дуализм волна-частица.

### Соотношение неопределенностей Гейзенберга

После выдвижения де Бройлем гипотезы об универсальности дуализма волна-частица и экспериментального подтверждения наличия у частиц волновых свойств, возникли принципиальные проблемы с описанием положения частицы в пространстве. Как совместить волновую природу частиц с привычным представлением о размещении частицы в определенной точке пространства и перемещении по траектории?

В классической механике частица в любой момент времени занимает строго определенное место в пространстве. Это означает, что в любой момент времени могут быть определены ее координаты ( $x, y, z$ ) и импульс (скорость). Но в опытах по дифракции пучка электронов наблюдается дифракционная картина. Это означает, что понятие траектории электрона не существует. Следовательно, наличие у частиц волновых свойств приводит к необходимости введения нового способа описания состояния квантовой частицы. Отсутствие траектории частицы означает невозможность определения в данный момент времени всех ее значений координат ( $x, y, z$ ) и соответствующих проекций импульса ( $P_x, P_y, P_z$ ). Это обстоятельство составляет содержание принципа неопределенности Гейзенберга.

Согласно *соотношению неопределенностей Гейзенберга* у микрочастицы всегда существует неопределенность координат ( $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ) и неопределенность соответствующих проекций импульса ( $\Delta P_x, \Delta P_y, \Delta P_z$ ), причем эти неопределенности удовлетворяют условиям:

$$\Delta x \cdot \Delta P_x \geq \mathbf{h}, \quad \Delta y \cdot \Delta P_y \geq \mathbf{h}, \quad \Delta z \cdot \Delta P_z \geq \mathbf{h}, \quad (1.33)$$

т.е. произведение неопределенностей координаты и соответствующей ей проекции импульса не может быть меньше величины  $\hbar$ . Из соотношения (1.33) вытекает фактическая невозможность одновременно и с одинаковой степенью точности измерить координату и импульс микрообъекта. Это не связано с несовершенством методов измерения или измерительных приборов, а отражает специфику микрообъектов.

В квантовой теории рассматривается также соотношение неопределенностей для энергии  $\Delta E$  и времени  $\Delta t$ , в течение которого частица обладает этой энергией. Неопределенности в значениях этих величин удовлетворяют условию

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar. \quad (1.34)$$

Частица, имеющая в некотором состоянии среднее время жизни  $\Delta t$ , не может быть охарактеризована определенным значением энергии. Разброс энергии  $\Delta E$  возрастает с уменьшением среднего времени жизни.

### Волновая функция

В дифракционных опытах поток электронов, проходя через дифракционную решетку, попадает на фотопластинку, вызывая ее почернение в местах попадания. В результате дифракции электроны летят в определенных направлениях к дифракционным максимумам. Подобная картина возникает при дифракции света на дифракционной решетке, когда электромагнитная волна разделяется на ряд дифракционных пучков. Электрон, взаимодействуя с решеткой, разделиться на части не может. Но наличие волновых свойств электрона приводит к тому, что он может попасть в одни области фотопластинки (соответствующие положению дифракционного максимума) и не может попасть в другие ее части (соответствующие положению дифракционного минимума). В каком направлении он полетит и в какую точку он попадет, заранее указать невозможно. Случайный характер попадания в ту или иную точку приводит к необходимости описывать эти процессы вероятностными законами. Необходимость вероятностного подхода к описанию микрочастиц является одной из важнейшей отличительной особенностью квантовой теории.

Для описания волновых свойств микрочастиц вводят понятие *волновой функции*, называемой  $\psi$  (пси)-функцией, зависящей от координат частицы.

М. Борн дал статистическую интерпретацию волновой функции: квадрат модуля волновой функции в какой-либо области пространства в данный момент времени определяет вероятность обнаружения частицы в единице объема данной области пространства.

Вероятность  $dW$  нахождения частицы в элементе объема пространства  $dV$ , согласно Борну, равна  $dW = |\psi(x, y, z)|^2 dV$ . Квадрат модуля волновой функции  $|\psi(x, y, z)|^2$  можно рассматривать как вероятность обнаружения частицы в единичном объеме вблизи точки с координатами  $x, y, z$ . Эта величина называется *плотностью вероятности*.

Если достоверно известно, что частица находится в объеме  $V$ , то полная вероятность обнаружения частицы в нем, определяемая суммой всех вероятностей  $dW$  нахождения частицы в элементах объема  $dV$ , будет равна единице (100%). Этот результат даст интегрирование по всему объему  $V$ , в котором находится частица:

$$\int_V |\psi(x, y, z)|^2 dV = 1. \quad (1.35)$$

Равенство (1.35) называется **условием нормировки волновой функции**.

С течением времени состояние системы, а с ним и волновой функции может меняться, в этом случае волновую функцию необходимо рассматривать как функцию от времени  $t$ :  $\psi = \psi(x, y, z, t)$ .

Волновая функция выступает в квантовой механике как основной носитель информации о состоянии системы. Для случая свободной частицы волновую функцию можно записать в виде уравнения плоской бегущей волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ :

$$\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx), \quad (1.36)$$

где  $A$  – амплитуда;  $\omega$  – циклическая частота волновой функции;  $k$  – волновое число, равное  $\frac{2\pi}{\lambda}$ .

### Уравнение Шредингера

В классической механике основным уравнением для расчета движения является второй закон Ньютона. Основным уравнением в квантовой механике является уравнение Шредингера, которое позволяет определить волновую функцию частицы, полностью описывающую ее состояние.

Для получения этого уравнения воспользуемся гипотезой де Бройля, согласно которой любой частице сопоставляют волну, длина которой вычисляется по формуле (1.31). Дважды продифференцируем волновую функцию (1.36) по времени:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -k^2 A \cos(\omega t - kx). \quad (1.37)$$

Квадрат волнового числа  $k$  можно преобразовать следующим образом:

$$k^2 = \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} = \frac{4\pi^2 m^2 v^2}{h^2} = \frac{2m}{\hbar^2} E_{кин}, \quad (1.38)$$

где  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  – постоянная Планка с чертой.

В формуле (1.38) длина волны  $\lambda$  определяется по формуле де Бройля  $\lambda = \frac{h}{mv}$ ,

где фазовая скорость волны  $v$  выражается через ее кинетическую энергию

$$E_{кин} = \frac{mv^2}{2}.$$

При подстановке (1.38) в (1.37) уравнение примет вид:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} E_{кин} y, \quad (1.39)$$

Таким образом, формула (1.39) представляет собой уравнение, которому подчиняется волновая функция свободной частицы. Запишем его в следующей форме:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E_{кин} y = 0. \quad (1.40)$$

Если частица находится во внешнем потенциальном поле, то полная энергия частицы  $E$  будет складываться из кинетической энергии  $E_{кин}$  и потенциальной энергии  $U$ . Выразим кинетическую энергию как  $E_{кин} = E - U$  и подставим в уравнение (1.40):

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) y = 0. \quad (1.41)$$

Формулы (1.40) и (1.41) представляют собой **уравнение Шредингера** для стационарных (не зависящих от времени) состояний частицы.

Приведенные выше рассуждения нельзя считать строгим выводом данного уравнения. Уравнение Шредингера как основное уравнение квантовой механики постулируется, и его правильность подтверждается результатами опытных данных.

### **Частица в потенциальной яме**

В качестве простого примера применения уравнения Шредингера рассмотрим случай *частицы, находящейся в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме*.

Пусть частица может двигаться только вдоль оси  $x$ , и движение ограничено стенками  $x = 0$ ,  $x = l$  (рис.1.6). Между этими стенками частица движется свободно, но за пределы области  $(0, l)$  проникнуть не может. В область пространства, куда частица вообще не может проникнуть, потенциальная энергия  $U$  обращается в бесконечность, и вероятность обнаружения частицы в этих областях и, соответственно, волновая функция частицы, везде равна нулю.

Зависимость потенциальной энергии  $U$  частицы от координаты  $x$  можно определить как:

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & \text{для } x > l, \quad x < 0 \\ 0, & \text{для } 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

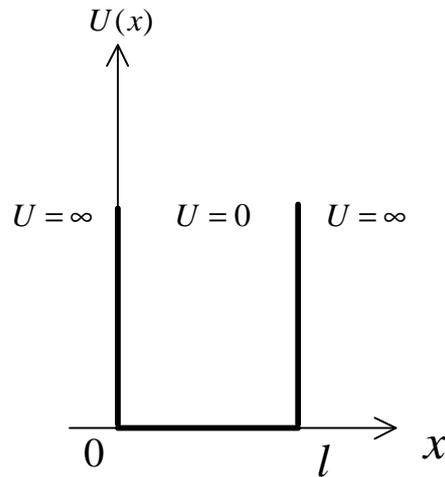


Рис.1.6. Потенциальная яма

В первой ( $x < 0$ ) и третьей ( $x > l$ ) областях потенциальная энергия  $U$  обращается в бесконечность, и, следовательно, на волновую функцию  $Y$  накладываются граничные условия:

$$\Psi(x) = \Psi(l) = 0. \quad (1.42)$$

Во второй области, где  $0 \leq x \leq l$ , потенциальная энергия  $U$  равна нулю, и для нее уравнение Шредингера (1.40) имеет следующий вид:

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \Psi = 0, \quad (1.43)$$

где  $E$  – энергия частицы;  $m$  – масса частицы.

Коэффициент, стоящий перед волновой функцией  $Y$ , в уравнение (1.43), согласно (1.38), представляет собой квадрат волнового числа:

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = \left(\frac{p}{\hbar}\right)^2 = k^2.$$

Тогда уравнение Шредингера (1.43) примет вид:

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + k^2 \cdot \Psi = 0. \quad (1.44)$$

Уравнение (1.44) подобно дифференциальному уравнению, описывающему гармонические колебания, и его общее решение будет:

$$\Psi(x) = A \sin(kx + \alpha) \quad (1.45)$$

где  $A$  и  $\alpha$  – постоянные.

Величины  $k$  и  $\alpha$  находятся из граничных условий (1.42):

$$\Psi(0) = A \cdot \sin(\alpha) = 0, \quad (1.46)$$

$$\Psi(l) = A \cdot \sin(kl) = 0. \quad (1.47)$$

Из уравнения (1.46) следует, что  $\alpha=0$ , а уравнение (1.47) определяет значения волнового числа  $k$ . Синус равен нулю, когда его аргумент принимает следующие значения:

$$k l = n \pi,$$

где  $n$  – целое число  $n=1,2,3,\dots$ . Отсюда следует, что

$$k = \frac{n\pi}{l}; \quad k^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad (1.48)$$

Из формулы (1.48) определяются допустимые значения энергии  $E_n$  для частицы, которые называются **собственными значениями энергии**:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2. \quad (1.49),$$

Целое число  $n$  называется **главным квантовым числом**, которое определяет набор стационарных состояний и соответствующие им **собственные значения энергии**  $E_n$  (1.49).

Таким образом, видно, что частица в потенциальной яме обладает не произвольным значением энергии, а набором определенных дискретных значений  $E_n$ , т.е. **энергия квантуется**.

При различных значениях  $n$  получаются разные типы волновых функций. Волновые функции  $\psi$ , удовлетворяющие уравнению Шредингера (1.44), определяются согласно формуле (1.45):

$$y(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right). \quad (1.50)$$

Постоянная  $A$  находится из условия нормировки волновой функции (1.35):

$$\int_0^l |y(x)|^2 dx = 1, \quad A^2 \cdot \int_0^l \sin^2\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx = 1. \quad (1.51).$$

В результате интегрирования уравнения (1.51) получим, что  $A = \sqrt{\frac{2}{l}}$ .

Подставив значение константы  $A$  в (1.50), найдем окончательное выражение для волновой функции частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме:

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right). \quad (1.52)$$

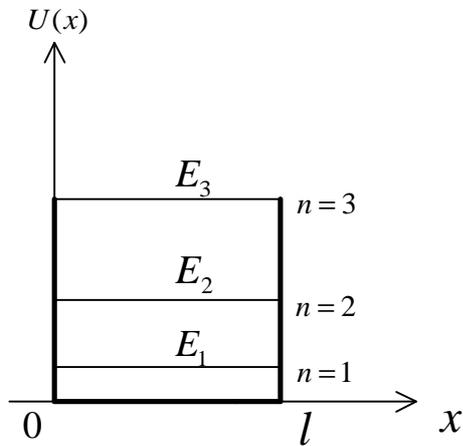
Квантовое число  $n$  определяет не только собственные значения энергии  $E_n$ , но и соответствующие им **собственные волновые функции** (1.52).

Вероятность обнаружения частицы в интервале  $dx$  в потенциальной яме в стационарном состоянии  $n$  будет равна  $y_n(x)^2 \cdot dx$ .

Вероятность обнаружения частицы в интервале от  $x_1$  до  $x_2$ , согласно (1.35), определится:

$$W_{\text{набл}} = \int_{x_1}^{x_2} |y_n(x)|^2 dx = \frac{2}{l} \int_0^l \sin^2\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx = \frac{n\pi}{l} \dots$$

Здесь величина  $y_n(x)^2$  представляет собой плотность вероятности обнаружения частицы в точке с координатой  $x$ :



$$|y_n|^2 = \frac{2}{l} \sin^2\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad (1.53)$$

На рис.1.7 представлена схема энергетических уровней бесконечно глубокой потенциальной ямы.

На рис.1.8 представлены графики волновых функций электрона в бесконечно глубокой потенциальной яме (а) и графики зависимости плотности вероятности нахождения электрона в яме от координаты  $x$  (б).

Из рисунка 1.8, б следует, что в низшем энергетическом состоянии  $n=1$  наиболее вероятное нахождение электрона в центре ямы, а вероятность найти ее у стенок равна нулю.

Рис.1.7 Схема энергетических уровней бесконечно глубокой потенциальной ямы

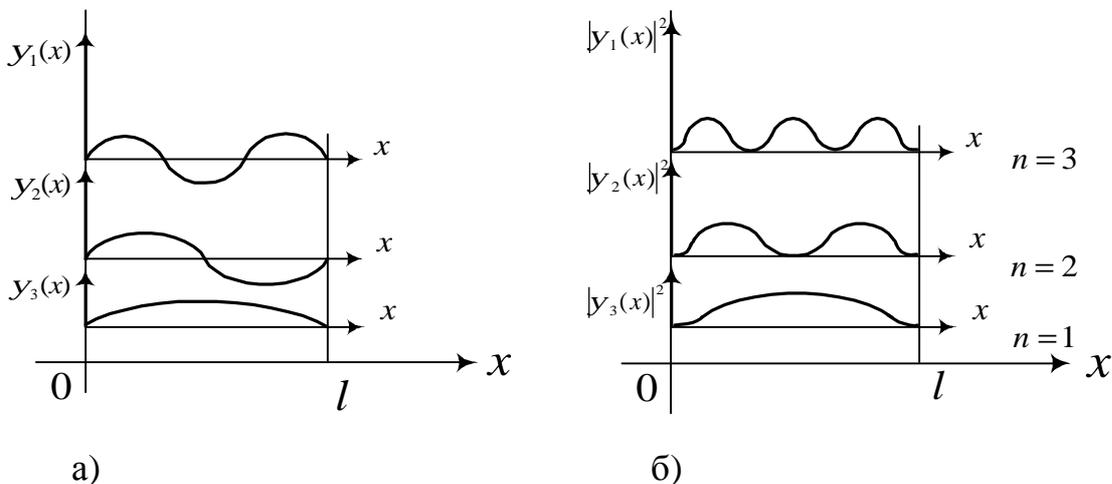


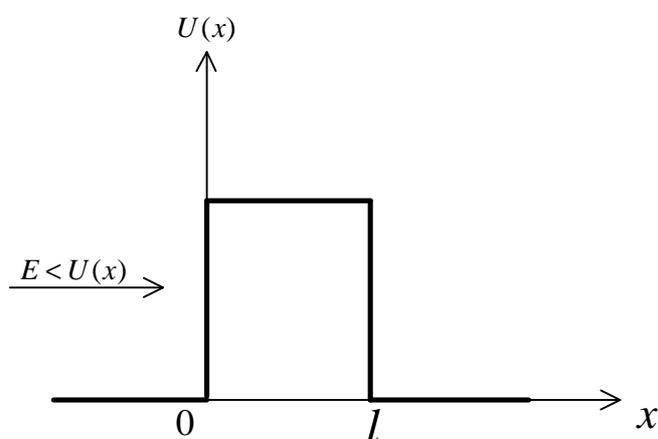
Рис.1.8. Графики волновых функций электрона в бесконечно глубокой потенциальной яме (а) и графики зависимости плотности вероятности нахождения электрона в яме от координаты  $x$  (б)

Этот результат является весьма неожиданным с точки зрения классической механики (классическую частицу в аналогичной ситуации можно было бы найти с равной вероятностью в любом месте потенциальной ямы). В состоянии  $n=2$ , напротив, электрон не может находиться в центре, а наиболее вероятное положение в точках, расположенных на расстоянии  $l/4$  от краев стенок ямы. При  $n=3$  наиболее вероятных состояний становится три.

## Прохождение частицы сквозь потенциальный барьер.

### Туннельный эффект

Введем понятие о потенциальном барьере. Пусть частица, обладающая энергией  $E$ , свободно движется вдоль оси  $x$ , и в некоторой точке (например,  $x=0$ ) потенциальная энергия меняется скачком от нуля до постоянного значения  $U$ .



Рассмотрим потенциальный барьер прямоугольной формы, т.е. потенциальная энергия в узкой области шириной  $l$  ( $0 \leq x \leq l$ ) имеет постоянное значение  $U$ . Вне этой области ( $x < 0, x > l$ )  $U = 0$  (рис.1.9).

В классической механике частица с энергией  $E > U$  обязательно преодолеет этот барьер, т.е. перейдет из области  $x < 0$  в область  $x > l$ .

Рис.1.9. Потенциальный барьер

Если энергия классической частицы  $E < U$ , то она ни при каких обстоятельствах не сможет преодолеть этот барьер.

Решение уравнения Шредингера (1.41) с таким видом потенциальной энергии приводит к принципиально новому результату о возможности прохождения частицы сквозь потенциальный барьер в том случае, когда энергия частицы меньше высоты барьера ( $E < U$ ). Это явление называется **туннельным эффектом**.

Квантовая частица, представляющая собой волну де Бройля, должна вести себя аналогично электромагнитной волне на границе раздела двух сред. Такая волна на границе раздела частично отражается, а частично проходит через границу во вторую среду. Волна де Бройля на границе потенциального барьера также испытывает не только отражение. Она может проникнуть в область за пределы барьера, т.е. существует отличная от нуля вероятность  $W$  обнаружить частицу в области за барьером. Для потенциального барьера прямоугольной формы решение уравнения Шредингера дает следующее значение этой вероятности  $W$ :

$$W_{\text{тунн}} = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)} l\right), \quad (1.54)$$

где  $m$  – масса частицы;  $E$  – ее энергия;  $l$  – ширина барьера;  $U$  – ее высота.

### Атом водорода в квантовой механике

Другой важный пример применения уравнения Шредингера – это решение задачи атома водорода, которое заключается в нахождении собственных значений энергии электрона в атоме. Рассмотренное выше уравнение

Шредингера (1.41) записано для одномерного случая, когда частица может двигаться только вдоль одной оси  $x$ .

В общем случае волновая функция является функцией от всех координат и уравнение (1.41) будет выглядеть:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + (E - U)\psi = 0.$$

Этому уравнению можно придать более компактную форму, используя оператор Лапласа  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ :

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + (E - U)\psi = 0. \quad (1.55)$$

Электрон в атоме водорода находится в поле кулоновской силы электростатического притяжения к ядру. Потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром:

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (1.56)$$

зависит только от  $r$  – расстояния между электроном и протоном, поэтому решать задачу с таким видом потенциальной энергии удобнее в сферической системе координат.

Подставив выражение для потенциальной энергии (1.56) в уравнение (1.55), получим уравнение Шредингера, которому подчиняется волновая функция, описывающая состояние электрона в атоме водорода:

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0, \quad (1.57)$$

где  $m$  – масса электрона;  $E$  – энергия электрона в атоме водорода.

Электрон в атоме находится в потенциальной яме, края которой имеют форму гиперболы (рис.1.10). Очевидно, что решение этой задачи должно быть подобно решению задачи, когда частица находилась в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме с прямоугольными краями.

Строгое решение уравнения (1.57) дает следующие результаты. Электрон в атоме обладает не произвольным значением энергии, а набором определенных отрицательных дискретных значений  $E_n$ :

$$E_n = -\frac{me^4}{8h^2\epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad (1.58)$$

где  $n$  – **главное квантовое число**, принимающее значения  $1, 2, 3, \dots, \infty$ .

Из (1.58) следует, что именно главное квантовое число определяет энергию электрона в атоме:  $E(n) \sim \frac{1}{n^2}$ . Выражение для значений энергий  $E_n$  (1.58) полностью совпадает с результатами теории Бора (1.26). Для атома водорода значение  $n=1$  соответствует основному состоянию электрона, значение  $n = \infty$  – свободному электрону ( $E_\infty=0$ ). Отрицательные значения энергии соответствуют связанному состоянию электрона, когда он находится внутри потенциальной ямы и имеет большие отрицательные значения потенциальной энергии (1.56). Положительными значениями энергии электрон обладает в свободном состоянии, когда он покидает пределы атома и его энергетический спектр становится непрерывным.

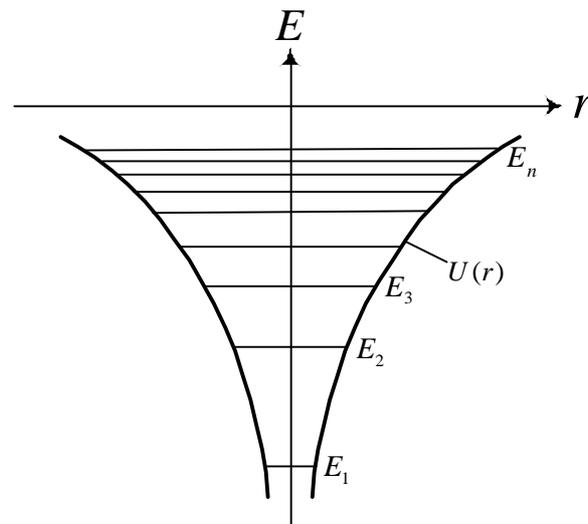


Рис.1.10. Потенциальная яма для электрона в атоме водорода

Из решения уравнения Шредингера (1.57) определяются не только значения энергии, но и волновые функции. Причем оказывается, что одному и тому же значению энергии электрона соответствует несколько различных состояний с разными волновыми функциями, соответствующим различным типам движения электрона. Все типы движения связаны с вращением электрона по орбитам вокруг ядра. Эти типы движения различаются разными значениями орбитального момента импульса и его проекцией на физически выделенное направление  $z$ .

Оказывается, что орбитальный момент импульса электрона может приобретать лишь дискретный ряд значения:

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)}, \quad (1.59)$$

где  $\hbar$  - постоянная Планка.

**Орбитальное квантовое число**  $l$ , определяющее модуль орбитального момента импульса электрона, может принимать целочисленные значения  $l=0, 1,$

$2, \dots, n-1$ , где  $n$  главное квантовое число. При этом оказывается, что вектор момента импульса  $\vec{L}$  имеет лишь такие ориентации в пространстве, при которых его проекция на физически выделенное направление  $z$  (например, направление внешнего магнитного поля) принимает значения, кратные  $\hbar$ :

$$L_z = m\hbar, \quad (1.60)$$

где  $m$  - *магнитное квантовое число*, которое может принимать значения  $m = -l, -l+1, \dots, 0, \dots, l-1, \dots, l$ . Всего  $2l+1$  значений; здесь  $l$  – орбитальное квантовое число.

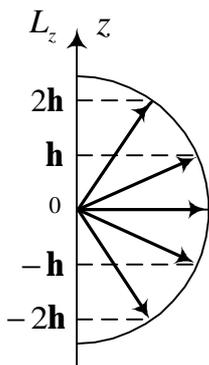


Рис.1.11. Возможные ориентации орбитального момента импульса

На рисунке 1.11 приведены возможные ориентации орбитального момента импульса  $\vec{L}$  относительно физически выделенного направления  $z$  (например, направление внешнего магнитного поля) для электрона в состоянии  $l = 2$ .

Таким образом, величина момента импульса электрона в атоме и его проекция на произвольное направление  $z$  квантуются, т.е. могут принимать значения, кратные  $\hbar$ . Для описания свойств атома водорода Бор постулировал квантование момента импульса электрона, движущегося по орбите вокруг ядра. В квантовой механике это свойство является следствием уравнения Шредингера (1.57).

Таблица 1. Обозначения состояний атома

$n$	$l$	Обозначение	$m$	Уровень энергии $E_n$
1	0	1s	0	$E_1$
2	0	2s	0	$E_2$
	1	2p	-1, 0, +1	
3	0	3s	0	$E_3$
	1	3p	-1, 0, +1	
	2	3d	-2, -1, 0, +1, +2	
4	0	4s	0	$E_4$
	1	4p	-1, 0, +1	
	2	4d	-2, -1, 0, +1, +2	
	3	4f	-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3	

Состояния атома, характеризуемые определенными наборами первых двух квантовых чисел, имеют свои обозначения. Состояния с различными значениями  $l$  имеют названия:  $l=0$  –  $s$ -состояния;  $l=1$  –  $p$ -состояния;  $l=2$  –  $d$ -состояния;  $l=3$  –  $f$ -состояния и т.д. В таблице 1 приведены некоторые из них.

### Спин

Вращение электрона вокруг ядра с одной стороны характеризуется механическим моментом импульса  $L$ , с другой – эквивалентно рамке с током. А всякая рамка с током всегда обладает магнитным моментом  $p_m$ . Эти моменты пропорциональны между собой ( $\dot{p}_m \sim \dot{L}$ ). Кроме вращения электрона вокруг ядра может быть и вращение электрона вокруг своей оси (спиновое вращение). Это утверждение нашло подтверждение во множестве опытов. Такое вращение электрона характеризуется спиновым моментом импульса и соответствующим ему спиновым магнитным моментом. Данный механический момент был назван **собственным моментом**, или **спином**. По-английски спин означает “верчение”. Подобно тому, как с движением Земли вокруг солнца связан ее орбитальный механический момент, собственный момент планеты можно связать с ее вращением вокруг своей оси.

Спин электрона  $L_s$  есть векторная величина. Подобно орбитальному механическому моменту собственный момент (спин) и его проекция на физически выделенное направление  $z$  квантуются по тому же самому правилу, как и орбитальный механический момент импульса  $L$  (1.59):

$$L_s = \mathbf{h}\sqrt{s(s+1)}, \quad (1.61)$$

где  $\mathbf{h}$  – постоянная Планка;  $s$  – **спиновое квантовое число**, определяющее модуль собственного момента импульса электрона.

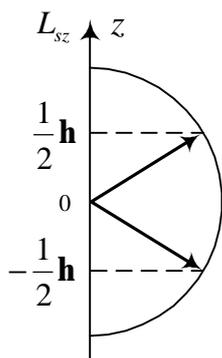


Рис.1.12. Возможные ориентации собственного момента импульса электрона

Проекция спина  $L_{sz}$  на физически выделенное направление  $z$  определяется выражением, аналогичным соотношению (1.60):

$$L_{sz} = m_s \mathbf{h}, \quad (1.62)$$

где  $m_s$  – **магнитное спиновое квантовое число**.

На рисунке 1.12 приведены возможные ориентации собственного момента импульса  $L_{sz}$  электрона относительно физически выделенного направления  $z$ .

Численные значения  $m_s$  были определены в опытах Штерна и Герлаха. Оказалось, что  $m_s$  может принимать только два значения  $+\frac{1}{2}$  и  $-\frac{1}{2}$ .

Необходимость введения спина для электрона появилась при объяснении опытов Штерна и Герлаха. Они пропускали через сильно неоднородное

магнитное поле поток атомов серебра, находящихся в основном  $s$ - состоянии. Так как у электронов с орбитальным квантовым числом  $l=0$  собственный магнитный момент отсутствовал (если  $L=0$ , то и  $p_m=0$ ), то магнитное поле не должно было оказывать на них никакого влияния. Однако на опыте наблюдалось разделение исходного потока электронов на два. Это расщепление потока атомов серебра происходит именно благодаря тому, что электрон, находящийся в  $s$ - состоянии, обладает собственным магнитным моментом связанным со спином.

Дальнейшие исследования показали, что наглядное представление спина как момента импульса, связанного с вращением электрона, не соответствует действительности.

С учетом магнитного спинового квантового числа состояние электрона в атоме определяется набором четырех квантовых чисел:

$$n, l, m, s.$$

## 2. Физика твердого тела

### Элементы квантовой статистики

Система, состоящая из огромного числа частиц, подчиняется статистическим законам. В отличие от классической статистической физики, в которой одинаковые частицы различимы, квантовая статистика стоит на точке зрения принципиальной неразличимости тождественных частиц. Согласно квантовой теории, частицы делятся на два класса. К первому классу относятся частицы с полуцелым спином (электроны, протоны, ...). Эти частицы подчиняются статистике Ферми-Дирака и называются **фермионами**. Ко второму классу относятся все частицы с нулевым и целым спином (фотоны, мезоны, ...). Эти частицы подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна и называются **бозонами**. В статистике Ферми-Дирака принимается, что в каждом квантовом состоянии может находиться не более одной частицы (принцип Паули). Статистика Бозе-Эйнштейна допускает, что в каждом квантовом состоянии может находиться любое число частиц.

В металле, как будет показано ниже, электроны могут иметь энергии в виде определенного набора энергетических уровней. Согласно принципу Паули, на каждом энергетическом уровне может одновременно находиться не больше двух электронов с противоположными спинами (состояние каждого электрона определяется своим набором четырех квантовых чисел). В соответствии с этим правилом, при  $T = 0$  К электроны последовательно заполняют уровни (по два на каждом) по мере роста энергии. Самый верхний занятый электронами уровень (при  $T = 0$  К) называется **уровнем Ферми**. Он соответствует максимальной кинетической энергии, которой обладает электрон в металле при абсолютном нуле температур. Данная энергия называется соответственно **энергией Ферми**  $E_F$  при  $T = 0$  К.

Таким образом, при  $T = 0$  К уровень Ферми определяет границу между заполненными и пустыми состояниями.

Очевидно, что чем больше число электронов в расчете на единицу объема, тем выше оказывается верхний заполненный электронами уровень  $E_F$ . Строгий расчет показывает, что зависимость энергии Ферми  $E_F$  при  $T = 0$  К от концентрации свободных электронов  $n$  определяется следующим выражением:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3p^2)^{2/3}, \quad (2.1)$$

где  $m$  – масса электрона;  $\hbar$  – постоянная Планка.

При  $T > 0$  К в результате теплового движения небольшое число электронов с энергией, близкой к  $E_F$ , будут заброшены на более высокие энергетические уровни. Такое распределение электронов в металле описывается законом Ферми-Дирака. Этот закон определяет вероятность  $f(E)$  того, что квантовое состояние с энергией  $E$  при температуре  $T$  занято электроном:

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{(E-E_F)/kT}}, \quad (2.2)$$

где  $E_F$  – энергия Ферми при температуре  $T$ ;  $k$  – постоянная Больцмана.

В частности, формула (2.2) отражает тот рассмотренный нами факт, что при  $T = 0$  К все уровни с энергией  $E \leq E_F$  заняты электронами, т.е. вероятность заполнения состояний  $f(E) = 1$ . Это легко показать. При  $T = 0$  К и  $E \leq E_F$  разность  $E - E_F = -\Delta E < 0$ , а  $\frac{1}{kT} = \frac{1}{0} = \infty$ . Тогда формула (2.2) преобразуется:

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{-\Delta E/0}} = \frac{1}{1 + e^{-\infty}} = 1.$$

Уровни с энергией  $E > E_F$  свободны, т.е. вероятность заполнения  $f(E) = 0$ . Те же рассуждения для  $E > E_F$  – разность  $E - E_F = \Delta E > 0$ , и формула (2.2) для данного случая дает результат:

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{+\Delta E/0}} = \frac{1}{1 + e^{+\infty}} = 0.$$

На рис.2.1,а предоставлена зависимость функции  $f(E)$  от энергии  $E$  электронов при  $T = 0$  К.

При температурах, отличных от нуля ( $T > 0$  К), функция Ферми-Дирака  $f(E)$  плавно меняется вблизи энергии Ферми  $E_F$  от единицы до нуля (рис.2.1,б). Это соответствует тому, что часть электронов покинула состояние с энергией меньше энергии Ферми  $E_F$  и находится в состояниях с энергией больше энергии Ферми  $E_F$ .

Заметим, что из формулы (2.2) следует, что при любой температуре  $T \neq 0$  К состояния с энергией, равной энергии Ферми ( $E = E_F$ ), имеет вероятность

заполнения равной  $1/2$  ( $f(E) = 1/2$ ). В этом и состоит смысл энергии Ферми при любой температуре.

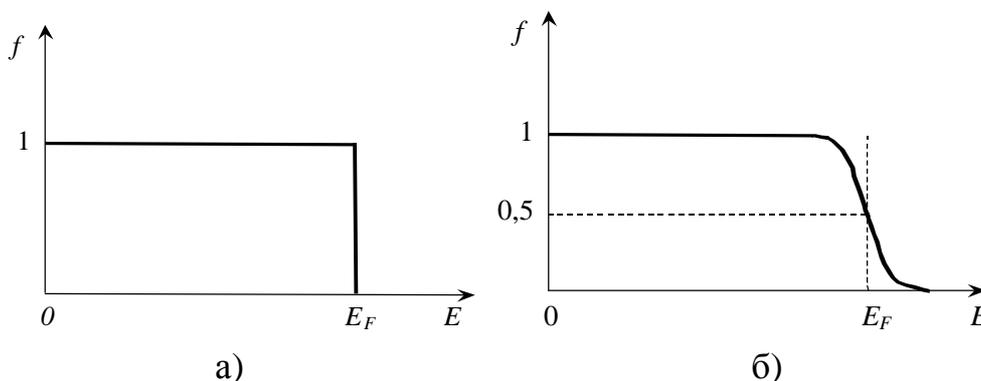


Рис. 2.1. Зависимость функции  $f(E)$  от энергии  $E$  электронов при  $T = 0$  К (а); зависимость функции  $f(E)$  от энергии  $E$  электронов при  $T > 0$  К (б)

### Элементы зонной теории твердого тела

В кристалле расстояния между атомами соизмеримы с размерами самих атомов. Это приводит к тому, что энергетический спектр электронов в кристалле принципиально отличается от спектра электронов свободного атома. Энергетический спектр свободного атома представляет собой набор отдельных энергетических уровней. В кристалле каждый энергетический уровень отдельного атома превращается в зону разрешенных энергетических состояний.

Пояснить образование зон можно следующими рассуждениями. Рассмотрим два изолированных атома какого-либо вещества. На одном энергетическом уровне каждого атома может находиться два электрона. При сближении атомов на расстояние, равное межатомному расстоянию в кристалле, происходит взаимодействие между атомами: два атома образуют единую квантовую систему, обладающую общим энергетическим спектром. При этом на один энергетический уровень системы теперь приходится четыре электрона, что запрещено принципом Паули. Следовательно, каждый уровень для размещения всех электронов должен расщепиться на два. Подобные рассуждения приводят к тому, что при сближении  $N$  атомов, каждый энергетический уровень изолированного атома расщепится на  $N$  уровней системы, которые образуют энергетическую зону. Расстояние между уровнями в энергетической зоне настолько мало, что энергетический спектр зон можно считать практически непрерывным. Очевидно, что из полностью заполненного уровня (на уровне находится 2 электрона) образуется полностью заполненная энергетическая зона. Частично заполненный уровень (на уровне находится 1 электрон) образует частично заполненную энергетическую зону. Свободный уровень атома образует полностью свободную энергетическую зону. Таким образом, энергетический спектр электронов в кристалле представляет собой чередующиеся разрешенные и запрещенные энергетические зоны.

Согласно зонной теории, различие в электрических свойствах металлов, диэлектриков и полупроводников объясняется неодинаковым заполнением электронами валентной зоны (верхняя полностью или частично заполненная зона) и шириной запрещенной зоны, разделяющей валентную зону и первую свободную зону (зона проводимости) (рис.2.2).

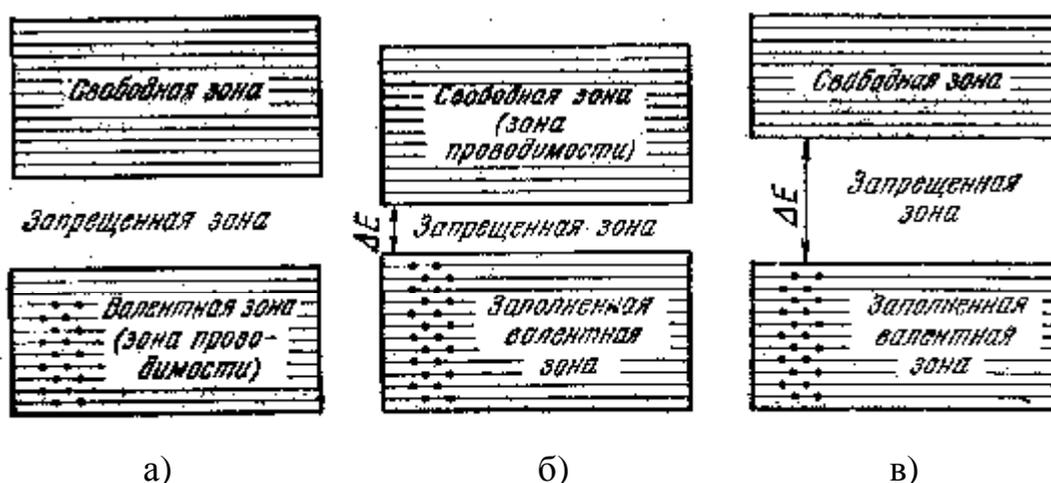


Рис.2.2. Расположение энергетических зон в металлах ( а), полупроводниках ( б) и диэлектриках (в)

Если валентная зона заполнена электронами не полностью, то при приложении внешнего электрического поля электроны могут непрерывно увеличивать свою энергию, переходя на верхние свободные уровни зоны, т.е. ускоряться в электрическом поле и участвовать в электропроводности кристалла. Все твердые тела, у которых валентная зона заполнена не полностью, являются хорошими проводниками. Такая валентная зона является и зоной проводимости.

Все твердые тела, у которых валентная зона полностью заполнена при  $T=0$  К, являются диэлектриками. Приложение внешнего электрического поля к такому кристаллу не может изменить состояние электронов в валентной зоне. Свободные уровни отсутствуют, увеличение энергии невозможно. Чтобы участвовать в электропроводности кристалла, электрон необходимо перевести в свободную зону, сообщив ему дополнительную энергию, которая больше ширины запрещенной зоны  $E_z$  (например, за счет тепловой энергии при увеличении температуры тела).

В зависимости от ширины запрещенной зоны данные кристаллы разделяются на диэлектрики и полупроводники. Твердые тела, у которых ширина запрещенной зоны достаточно велика ( $\geq 2-3$  эВ) для того, чтобы за счет теплового движения перевести электроны из валентной зоны в зону проводимости, являются хорошими изоляторами. Полупроводники имеют достаточно узкую ширину запрещенной зоны ( $\leq 2-3$  эВ), и с повышением

температуры переходы электронов из валентной зоны в зону проводимости становятся возможными.

**Собственная проводимость** полупроводников проявляется у химически чистых кристаллов (кремния, германия, элементов IV, V и VI групп Периодической системы Менделеева). При  $T = 0$  К в кристалле полупроводника (например, германия) зонная структура представляет собой полностью заполненную валентную зону и свободную от электронов зону проводимости. Каждый атом в кристаллической решетке германия имеет четыре валентных электрона, которые участвуют в образовании ковалентных связей с четырьмя соседними атомами. При повышении температуры кинетическая энергия электронов возрастает и может стать достаточной для разрыва связи с атомами кристаллической решетки.

В результате такие электроны становятся свободными (на схеме энергетических уровней отрыв электрона от атома соответствует переходу электрона из валентной зоны в зону проводимости). В покинутом электроном месте возникает вакантное состояние - положительно заряженная дырка, которое может заполнить электрон из соседней ковалентной связи. В этом случае дырка переместится на место пришедшего электрона. В результате дырка, переходя с места на место, будет блуждать по кристаллу, т.е. совершать хаотическое движение также как и освободившийся электрон. При наложении внешнего электрического поля к кристаллу электроны будут двигаться против поля, а дырки по полю, создавая электрический ток. Таким образом, в собственных полупроводниках наблюдается два механизма проводимости - электронный и дырочный. С повышением температуры проводимость полупроводников увеличивается, так как увеличивается число свободных носителей электронов - в зоне проводимости и дырок в валентной зоне.

Так же как и в металлах, распределение электронов в полупроводниках по уровням разрешенных энергетических зон описывается законом Ферми-Дирака. Уровень Ферми в полупроводниках при  $T = 0$  К также разделяет полностью заполненные и полностью пустые энергетические уровни, т.е. должен находиться в запрещенной зоне. Как показывают расчеты, для собственных полупроводников уровень Ферми располагается приблизительно посередине запрещенной зоны (точно посередине запрещенной зоны уровень Ферми располагается при  $T = 0$  К).

Тогда, согласно формуле (2.2), вероятность того, что электрон в зоне проводимости находится на уровне с энергией  $E$  при температуре  $T$ , определится разностью энергий  $E - E_F$  (считается, что уровень с энергией  $E$  находится вблизи дна зоны проводимости), которая будет равна половине ширины запрещенной зоны  $E_g/2$ . При комнатной температуре ( $T \approx 300$  К) величина  $kT$  примерно составляет 0,02 эВ. Для полупроводников с величиной запрещенной зоны порядка 1 эВ разность  $E - E_F \approx 0,5$  эВ, поэтому в знаменателе формулы (2.2) единицей можно пренебречь (т.к.  $E - E_F \gg kT$  и

$e^{(E-E_F)/kT} \approx e^{25} \gg 1$ ). Тогда вероятность заполнения электронами уровней в зоне проводимости определится:

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{(E-E_F)/kT}} \approx \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT}} = e^{-\frac{E_3}{2kT}}. \quad (2.3)$$

Концентрация электронов в зоне проводимости  $n$  (а также концентрация дырок в валентной зоне) в собственных полупроводниках будет пропорциональна этой вероятности (2.3):

$$n \propto e^{-\frac{E_3}{2kT}}, \quad (2.4)$$

где  $E_3$  – ширина запрещенной зоны;  $k$  – постоянная Больцмана. Так как удельная электропроводность  $\sigma$  пропорциональна концентрации  $n$ , то электропро-

водность  $\sigma$  также будет пропорциональна этой экспоненте:  $\sigma \propto e^{-\frac{E_3}{2kT}}$ .

Таким образом, зависимость электропроводности  $\sigma$  собственных полупроводников от температуры  $T$  определится выражением:

$$\sigma = \sigma_0 \cdot e^{-\frac{E_3}{2kT}}, \quad (2.5)$$

где  $\sigma_0$  – константа пропорциональности.

Из формулы (2.5) следует, что в отличие от металлов, электропроводность полупроводников растет с увеличением температуры.

**Примесная проводимость** полупроводников обусловлена наличием примеси в кристалле. Например, при внедрении примеси фосфора в кристалл кремния (один атом фосфора на  $10^5$  атомов кремния) его электропроводность увеличивается в  $10^5$  раз.

Полупроводники ***n*-типа** с электронной проводимостью образуются при замещении атома полупроводника атомом примеси, валентность которого на единицу больше. Например, четырехвалентный атом германия замещается пятивалентным атомом мышьяка. Четыре валентных электрона мышьяка образуют прочные ковалентные связи с четырьмя электронами соседних атомов германия. Пятый электрон, не образующий ковалентной связи, оказывается "лишним" и связан с атомом мышьяка значительно слабее, чем электроны сильной ковалентной связи. Его энергия связи составляет порядка 0,01–0,02 эВ, что примерно в 100 раз меньше энергии ковалентной связи (равной ширине запрещенной зоны). Поэтому отрыв пятого электрона может происходить даже при комнатных температурах ( $kT \approx 0,02$  эВ). При этом не возникает дырки (вакансии в ковалентной связи), а образуется неподвижный ион мышьяка, не участвующий в механизме электропроводности. Из рассмотренных энергетических соотношений следует, что энергетический уровень пятого

электрона мышьяка должен располагаться в запрещенной зоне на расстоянии  $\Delta E_d \approx 0,01-0,02$  эВ от дна зоны проводимости (рис.2.3,а).

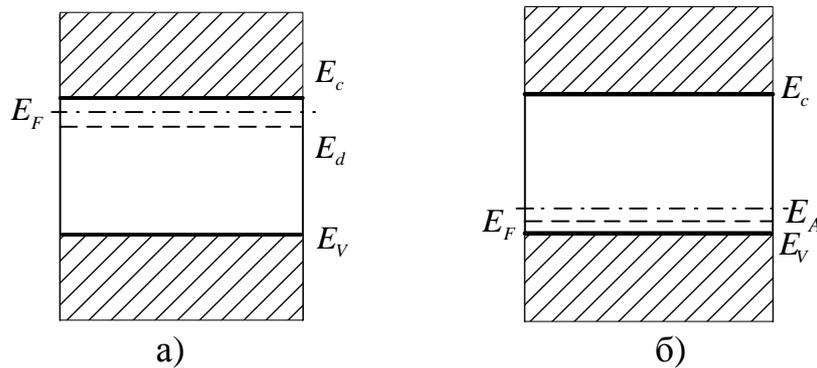


Рис.2.3. Примесная проводимость: а) донорная, б) акцепторная

Атомы примесей, являющиеся источниками электронов, называются **донорами**, а энергетические уровни этих примесей – **донорными уровнями**.

Донорных уровней, имеющих одинаковое значение энергии, столько, сколько атомов примесей в кристалле. Это объясняется тем, что атомы примеси расположены достаточно далеко друг от друга и не взаимодействуют между собой. Поэтому они не образуют своей кристаллической решетки. Их энергетические уровни не расщепляются и не образуют собственной энергетической зоны. Эти уровни называются **локальными**.

Уровень Ферми в полупроводнике, легированном донорной примесью, при  $T = 0$  К по-прежнему разделяет полностью заполненные и полностью пустые энергетические уровни и, следовательно, располагается в запрещенной зоне приблизительно посередине между донорными уровнями и дном зоны проводимости.

При повышении температуры электроны легко покидают эти донорные примесные уровни, переходят в свободную зону (зону проводимости) и обуславливают примесную электронную проводимость полупроводника (проводимость *n-типа*). Концентрация этих электронов  $n$ , оказавшихся в зоне проводимости, определяется точно так же, как в формуле (2.4):

$$n e^{-\frac{E_d}{2kT}}, \quad (2.6)$$

где  $E_d$  – расстояние между донорным уровнем и дном зоны проводимости;  $k$  – постоянная Больцмана.

Соответственно зависимость электропроводности  $\sigma$  от температуры  $T$  примесного полупроводника *n-типа* определится выражением аналогичным (2.5):

$$\sigma = \sigma_0 \cdot e^{-\frac{E_d}{2kT}}. \quad (2.7)$$

Полупроводники *p-типа* с дырочной проводимостью образуются при замещении атома полупроводника атомом примеси, валентность которого на единицу меньше. Если в кристалл германия ввести трехвалентную примесь, например индий, то для образования ковалентных связей с четырьмя электронами соседних атомов германия у атома индия не хватает одного электрона. Одна из связей оказывается неупакованной и представляет собой место, способное захватить электрон. Четвертый электрон может быть присоединен от ближайших атомов германия, имеющих полностью заполненную электронную оболочку.

В соответствующем месте, откуда ушел электрон, образуется дырка, а атом индия, захвативший “лишний” электрон, становится отрицательно заряженным ионом. Этот процесс идет с небольшим повышением энергии электрона, т.к. электрон сильнее связан с собственным атомом германия, чем с “чужим” атомом индия (энергия увеличивается на  $\approx 0,01 - 0,02$  эВ). При  $T = 0$  К такой процесс невозможен. Но при повышении температуры за счет небольшой тепловой энергии, электрон может совершить такой переход от атома германия к индию. Введение примеси индия на энергетической диаграмме соответствует возникновению в запрещенной зоне локальных уровней, удаленных от потолка валентной зоны на расстоянии  $\Delta E_a \approx 0,01 - 0,02$  эВ (рис.2.3,б). При  $T = 0$  К эти уровни пусты, при температуре, отличной от нуля, они могут быть заняты электронами.

Атомы примесей, захватывающие электроны из валентной зоны, называются **акцепторами**, а энергетические уровни этих примесных атомов – **акцепторными уровнями**.

Уровень Ферми в полупроводнике, легированном акцепторной примесью, разделяющий полностью заполненные и полностью пустые энергетические уровни, при  $T = 0$  К располагается в запрещенной зоне приблизительно посередине между акцепторными уровнями и потолком валентной зоны.

При повышении температуры электроны валентной зоны переходят на примесные уровни, образуя в валентной зоне дырки, и обуславливают примесную дырочную проводимость полупроводника (проводимость *p-типа*). Концентрация этих дырок  $p$ , оказавшихся в валентной зоне, определяется также, как и для электронов  $n$  в формуле (2.6):

$$pe^{-\frac{E_A}{2kT}}, \quad (2.8)$$

где  $E_A$  – расстояние между акцепторным уровнем и потолком валентной зоны;  $k$  – постоянная Больцмана.

Соответственно зависимость электропроводности  $\sigma$  от температуры  $T$  примесного полупроводника *p-типа* определится выражением аналогичным (2.7):

$$\sigma = \sigma_0 \cdot e^{-\frac{E_A}{2kT}}. \quad (2.9)$$

Таким образом, в отличие от собственной проводимости, осуществляющейся одновременно электронами и дырками, примесная проводимость обусловлена носителями одного знака: в случае донорной примеси – электронами, при наличии акцепторной примеси - дырками.

И для собственных и для привесных полупроводников температурная зависимость электропроводности  $\sigma$  носит экспоненциальный характер. Если взять логарифм выражений (2.5) и (2.7), то получим:

$$\ln \sigma = \ln \sigma_0 - \frac{E_z}{2kT} \quad \text{и} \quad \ln \sigma = \ln \sigma_0 - \frac{E_d}{2kT}. \quad (2.10)$$

Формула (2.10) показывает, что связь между электропроводностью  $\sigma$  и температурой  $T$  удобно представить в виде линейной зависимости, если по оси ординат отложить  $\ln \sigma$ , а по оси абсцисс –  $1/T$  (рис.2.4). График состоит из трех частей.

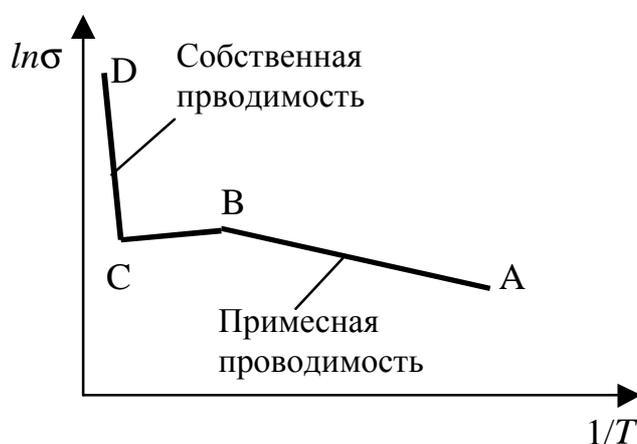


Рис. 2.4. Температурная зависимость электропроводности примесных полупроводников

При низких температурах зависимость в этих координатах представляет собой прямую (участок  $AB$ ), тангенс угла наклона которой к оси абсцисс равен  $E_d/2k$  для  $n$ -типа и  $E_a/2k$  для  $p$ -типа полупроводников. При повышении температуры (движение вдоль оси абсцисс –  $1/T$  происходит справа налево) электропроводность  $\sigma$  растет от точки  $A$  до точки  $B$ . В точке  $B$ , например, для  $n$ -типа, уже при температуре, равной  $T_B$ , все электроны перешли с примесных донорных уровней в зону проводимости, и при  $T > T_B$ ,  $\sigma$  не растет.

Пологий участок ( $BC$ ) соответствует истощению примесей. При дальнейшем повышении температуры от  $T=T_C$  и выше начинается механизм собственной проводимости, при котором происходит прямой переход электронов из валентной зоны в зону проводимости. На графике - это прямая (участок  $CD$ ), тангенс угла наклона которой к оси абсцисс равен  $E_z/2k$ .

По углу наклона участка графика  $CD$  можно определить величину запрещенной зоны  $E_z$ . А угол наклона участка графика  $AB$  позволяет определить расстояние между донорными уровнями и дном зоны проводимости для  $n$ -типа (или расстояние между акцепторными уровнями и потолком валентной зоны для  $p$ -типа).

### ***p-n* переход**

Основой работы многих полупроводниковых приборов является  $p-n$  переход. Это тонкий слой на границе между полупроводниками с разным типом проводимости. Рассмотрим физические процессы, возникающие в  $p-n$  переходе.

В  $p$ -области дырки являются основными носителями тока, электроны неосновными, т.к. концентрация электронов в  $p$ -области ничтожно мала (она обусловлена лишь малой собственной проводимостью германия). В  $n$ -области, напротив, электроны являются основными носителями, а дырки неосновными. При контакте  $p$ - и  $n$ -областей происходит встречная диффузия свободных носителей. Дырки из  $p$ -области устремляются в  $n$ -область (и там рекомбинируют с электронами), а электроны из  $n$ -области устремляются в  $p$ -область (и там рекомбинируют с дырками). Электрон, попав в  $p$ -область, занимает вакантное место в ковалентной связи. В результате свободные электрон и дырка исчезают, и образуется нейтральный атом германия. Такой процесс называется **рекомбинацией**.

В  $p$ - области из-за ухода дырок образуется отрицательный объемный заряд неподвижных ионизированных акцепторов, а в  $n$ -полупроводнике из-за ухода электронов образуется положительный объемный заряд неподвижных ионизированных доноров. Эти объемные заряды образуют на границе двойной электрический слой:  $p$ -область заряжается отрицательно,  $n$ -область – положительно (рис.2.5). Возникающее при этом электрическое поле  $\vec{E}$ , направленное от «+» к «-», препятствует дальнейшим переходам электронов в  $p$ -область, а дырок – в  $n$ -область. Это поле, препятствующее движению основных носителей, называется **запирающим**. Заметим, что для неосновных носителей это поле не является запирающим.

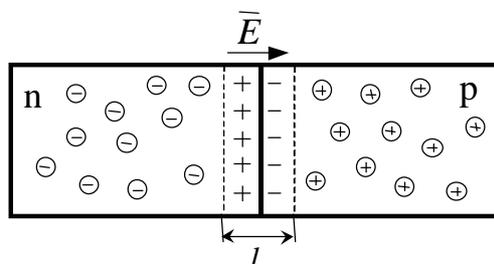


Рис.2.5.  $p-n$  переход

Таким образом, на границе  $p$ - $n$  перехода достигается равновесие: движение основных носителей, обладающих достаточной энергией для преодоления запирающего электрического поля, компенсируется движением неосновных носителей, и результирующий ток равен нулю.

Толщина слоя  $p$ - $n$  перехода составляет  $10^{-6}$ - $10^{-7}$  м. Так как двойной электрический слой образуется неподвижными зарядами, то он характеризуется повышенным сопротивлением.

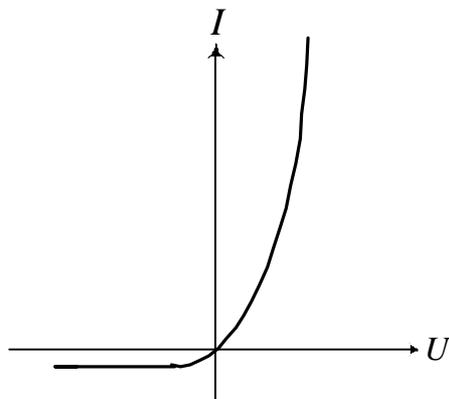


Рис.2.6. Вольт-амперная характеристика  $p$ - $n$ -перехода

Сопротивление запирающего слоя можно изменить с помощью внешнего электрического поля. Если на  $p$ -область подать плюс от внешнего источника тока, а на  $n$ -область минус (**прямое подключение**), то направление внешнего поля будет противоположно направлению поля запирающего слоя, что приводит к уменьшению величины запирающего поля. Это вызовет движение электронов в  $n$ -полупроводнике и дырок в  $p$ -полупроводнике к границе  $p$ - $n$  перехода навстречу друг к другу. В результате толщина запирающего слоя, обедненного носителями, и его сопротивление уменьшается. Количество основных носителей, преодолевших запирающее поле, возрастает (интенсивность движения неосновных носителей не изменяется), и электрический ток проходит через  $p$ - $n$  переход.

Если на  $p$ -область подать минус, а на  $n$ -область — плюс (**обратное подключение**), то направление внешнего поля совпадет с направлением поля запирающего слоя. Это вызовет движение электронов в  $n$ -полупроводнике и дырок в  $p$ -полупроводнике от границы  $p$ - $n$  перехода в противоположные стороны. В результате толщина запирающего слоя еще больше увеличится и его сопротивление возрастет. В этом направлении электрический ток через  $p$ - $n$  переход практически не проходит. Вклад в него дают лишь неосновные носители, концентрация которых очень мала, движением основных носителей можно пренебречь. Таким образом,  $p$ - $n$  переход обладает односторонней проводимостью. Вольт-амперная зависимость  $p$ - $n$  перехода, т.е. зависимость силы тока от приложенного внешнего напряжения, представлена на рисунке 2.6.

Этот механизм односторонней проводимости  $p$ - $n$  перехода можно также описать с точки зрения зонной теории. На рисунке 2.7 приведена энергетическая схема  $n$ -типа и  $p$ -типа полупроводника (например, германия, легированного соответственно донорной и акцепторной примесью).

При контакте двух полупроводников с разным типом проводимости зона проводимости и валентная зона становятся общими (рис.2.8).

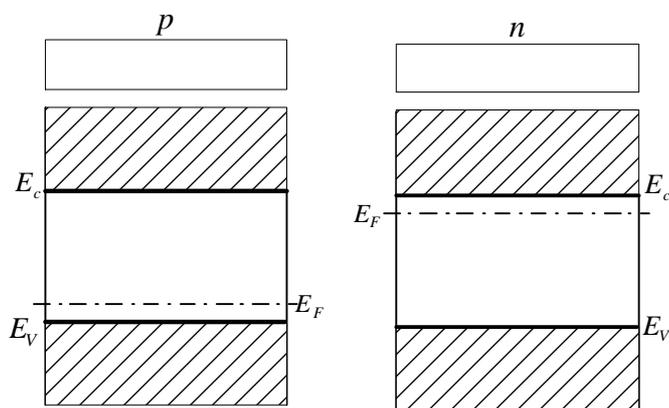


Рис.2.7. Энергетическая схема а)  $p$ -типа; б)  $n$ -типа полупроводника

Свободные электроны из  $n$ -области переходят в  $p$ -область и стремятся занять там более низкие вакантные уровни в валентной зоне. Уход электронов из  $n$ -области приведет к тому, что она зарядится положительно, а  $p$ -область отрицательно.

Поскольку потенциальная энергия электронов связана с потенциалом

$$W_n = e \cdot \phi = -|e| \cdot \phi, \quad (2.11)$$

то потенциал  $n$ -области возрастает, а потенциальная энергия электронов уменьшается. Потенциал  $p$ -области, наоборот, уменьшается, а потенциальная энергия электронов в этой области возрастает. Это приводит к тому, что энергетические уровни в  $p$ -области приподнимаются, а в  $n$ -области опускаются. Образовавшийся изгиб уровней на границе  $p$ - $n$  перехода показан на энергетической диаграмме (рис.2.8).

Этот процесс смещения энергетических уровней, связанный с переходами электронов из  $n$ -области в  $p$ -область, прекратится, когда уровни Ферми для обоих полупроводников выровняются (подобно уровням воды в сообщающихся сосудах). В результате в общей зоне проводимости между уровнями энергии дна зоны в  $p$ - и  $n$ -областях возникает разность энергий, равная  $e j_k$ , т.е. образуется потенциальный барьер для переходов электронов из  $n$ - в  $p$ -область (для основных носителей). Величина потенциального барьера  $e j_k$  определяется первоначальной разностью энергий Ферми в обоих полупроводниках  $n$ - и  $p$ -типа.

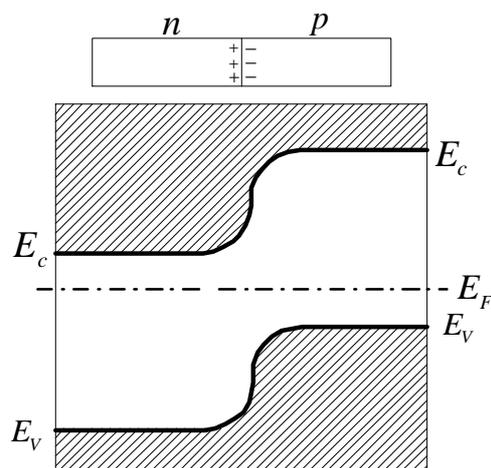


Рис.2.8. Изгиб энергетических уровней на границе  $p$ - $n$  перехода

В  $n$ -области электронов (основных носителей) много, но переход электронов в  $p$ -область связан с преодолением потенциального барьера (переход слева направо на рис.2.9,а). В  $p$ -области электронов (неосновных носителей) мало, но они свободно “падают” с барьера (переход справа налево на рис.2.9,а). В состоянии равновесия число электронов в  $n$ -области, способных преодолеть потенциальный барьер, равно числу электронов, переходящих из  $p$ -области через границу. Следовательно, суммарный ток через  $p$ - $n$  переход равен нулю.

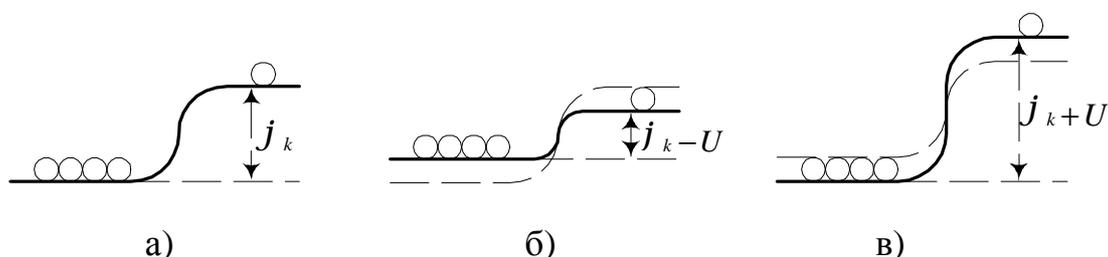


Рис.2.9. Величина потенциального барьера на границе  $p$ - $n$  перехода: а) в состоянии равновесия; б) при прямом подключении; в) при обратном подключении  $p$ - $n$  перехода

При прямом подключении величина потенциального барьера уменьшится, т.к. если подать на  $n$ -область минус – потенциал  $n$ - области уменьшится, а потенциальная энергия электронов возрастет, и соответственно, наоборот, для  $p$ -области (рис.2.9,б). Уменьшение барьера приведет к тому, что поток основных носителей, способных преодолеть этот барьер, возрастет, а не основных останется тем же и, следовательно, величина результирующего тока растет.

При обратном подключении  $p$ - $n$  перехода величина потенциального барьера увеличивается. Потенциал  $p$ -области уменьшается,  $n$ -области возрастает, потенциальная энергия электронов, согласно формуле (2.11),

наоборот,  $p$ -области возрастает,  $n$ -области уменьшается (рис.2.9,в). Энергетические уровни на границе перехода: в  $p$ -области еще больше поднимаются, а в  $n$ -области еще больше опускаются. Число основных носителей, способных преодолеть этот барьер, становится пренебрежительно малым. Ток через  $p$ - $n$  переход практически отсутствует.

## Физика атомного ядра

Согласно модели атома Резерфорда, в состав атома кроме электрона входит положительно заряженное ядро, размеры которого составляют порядка  $10^{-14}$  -  $10^{-15}$  м. Согласно модели ядра, предложенной Д.Д. Иваненко и развитой в последствии В. Гейзенбергом, атомное ядро состоит из элементарных частиц – **протонов** и **нейтронов**. Протон имеет положительный заряд, равный заряду электрона, и массу покоя  $m_p=1,6726 \cdot 10^{-27}$  кг. Нейтрон – нейтральная частица с массой покоя  $m_n=1,6749 \cdot 10^{-27}$  кг. Протоны и нейтроны называются **нуклонами**. Общее число нуклонов в ядре называется **массовым числом**  $A$ . Общее число протонов в ядре называется **зарядовым числом**  $Z$ . Число нейтронов  $N$  в ядре составит  $N = A - Z$ . Зарядовое число ядра совпадает с порядковым номером химического элемента в таблице Менделеева, поэтому оно определяет тип химического элемента, к которому принадлежит ядро.

Ядро обозначается тем же символом, что и атом в таблице Менделеева с указанием массового и зарядового числа:



Так как атом электронейтрален, то положительный заряд ядра равен заряду электронной оболочки, и, следовательно, зарядовое число ядра совпадает с количеством электронов в атоме.

Возможно существование ядер с одинаковым зарядовым числом  $Z$ , но разными массовыми числами  $A$ . Это ядра с одинаковым числом протонов, но разным числом нейтронов называются **изотопами**. Например, водород имеет три изотопа:  ${}^1_1H$  -протий,  ${}^2_1H$  -дейтерий,  ${}^3_1H$  -тритий.

Атомные ядра являются устойчивыми образованиями. Это обеспечивается интенсивным внутриядерным взаимодействием между нуклонами, которое называется **сильным взаимодействием**. Сильное взаимодействие удерживает нуклоны на расстояниях  $10^{-15}$  м друг от друга. Для того чтобы расщепить ядро на отдельные нуклоны, необходимо преодолеть силы притяжения между нуклонами, и, следовательно, затратить определенную энергию, которую называют **энергией связи ядра**. В обратном процессе при образовании ядра из нуклонов должна выделяться такая же энергия, равная энергии связи ядра.

Выделение и поглощение энергии связи можно выразить через изменение массы ядра по формуле Эйнштейна (1.15):

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2. \quad (3.1)$$

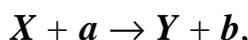
Эксперименты подтверждают, что масса ядра действительно всегда меньше, чем сумма масс составляющих его нуклонов. Разность между массой ядра  $m_{\text{я}}$  и массой составляющих его нуклонов назвали **дефектом массы** ядра:

$$\Delta m = [Z \cdot m_p + N \cdot m_n] - m_{\text{я}}. \quad (3.2)$$

Тогда с учетом формулы (3.1) энергия связи ядра определяется выражением:

$$E_{\text{св}} = \Delta m \cdot c^2 = [Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - m_{\text{я}}] c^2. \quad (3.3)$$

Дефект масс наблюдается также и при протекании **ядерных реакций**, т.е. реакций, в результате которых происходит превращение одних ядер в другие. Ядерные реакции обычно протекают по следующей схеме:



где  $X$  – материнское ядро;  $a$  – частица, взаимодействующая с материнским ядром;  $Y$  – дочернее ядро;  $b$  – частица, освобождающаяся при появлении дочернего ядра. В этом случае изменение массы в результате реакции, т.е. дефект масс участвующих ядер и частиц, определяется выражением:

$$\Delta m = [m_X + m_a] - [m_Y + m_b],$$

а выделяемая или поглощаемая в результате реакции энергия – **энергетический эффект реакции** – определяется выражением:

$$Q = \Delta m \cdot c^2 = ([m_X + m_a] - [m_Y + m_b]) c^2. \quad (3.4)$$

Важной характеристикой ядра, определяющей его устойчивость, является **удельная энергия связи**  $\delta E_{\text{св}}$  – энергия связи, приходящаяся на один нуклон:

$$\delta E_{\text{св}} = \frac{E_{\text{св}}}{A}. \quad (3.5)$$

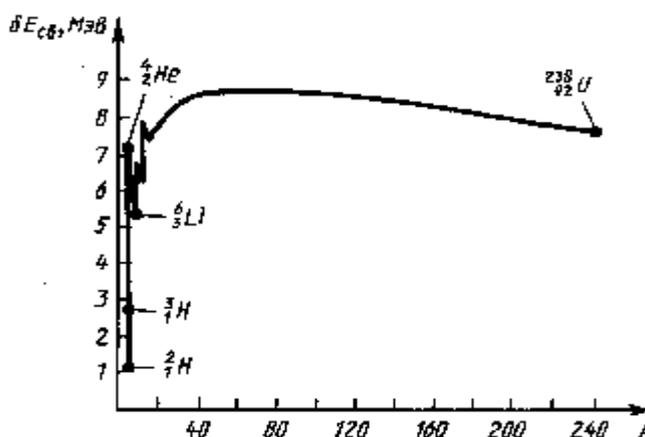


Рис.3.1. Зависимость удельной энергии связи от массового числа элемента

Чем больше удельная энергия связи, тем устойчивее ядро. Из рисунка 3.1 следует, что наиболее устойчивыми с энергетической точки зрения являются ядра средней части таблицы Менделеева, у которых  $A$  лежит в диапазоне от 50 до 60. Тяжелые и легкие ядра менее устойчивы. Это означает, что энергетически выгодны следующие процессы: 1) деление тяжелых ядер на более легкие (радиоактивный распад); 2) слияние легких ядер друг с другом в более тяжелые (термоядерный синтез). При обоих процессах выделяется огромное количество энергии.

### Радиоактивный распад

Нестабильность атомных ядер приводит к **радиоактивности** – способности к самопроизвольному превращению одних атомных ядер в другие, которые сопровождаются испусканием элементарных частиц. Этот процесс превращения ядер называют **радиоактивным распадом**. При распаде количество ядер исходного химического элемента уменьшается, так как они превращаются в ядра другого или других элементов. Такие процессы превращения ядер носят спонтанный характер и происходят независимо друг от друга, поэтому можно считать, что уменьшение числа радиоактивных ядер  $dN$ , распадающихся за малый промежуток времени  $dt$ , пропорционально как числу имеющихся ядер  $N$ , так и самому промежутку времени  $dt$ :

$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt, \quad (3.6)$$

где коэффициент пропорциональности  $\lambda$  называется **постоянной распада**. Знак минус в правой части выражения (3.6) означает, что величина  $dN$  отрицательна, т.е. при распаде происходит уменьшение числа ядер исходного элемента. Из формулы (3.6) следует, что постоянная распада  $\lambda$  представляет собой относительное число распавшихся ядер в единицу времени  $\lambda = \frac{dN/N}{dt}$  и определяет скорость радиоактивного распада.

Разделим переменные в выражении (3.6) и проинтегрируем полученное уравнение:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda \cdot dt, \quad \int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \cdot \int_0^t dt.$$

После интегрирования получим  $\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda t$ , или

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (3.7)$$

где  $N_0$  – количество нераспавшихся ядер в начальный момент времени,  $N$  – количество нераспавшихся ядер в момент времени  $t$ .

Формула (3.7) выражает собой **закон радиоактивного распада**, согласно которому число нераспавшихся ядер убывает со временем по экспоненте.

Количество ядер, распавшихся за время  $t$ , определится:

$$N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t}). \quad (3.8)$$

Из формулы (3.7) видно, что если время  $t$  равно обратной величине постоянной распада  $\frac{1}{\lambda}$ , то за это время первоначальное число ядер уменьшится в  $e$  раз. Это время называется **средним временем жизни  $t$**  радиоактивного ядра:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}. \quad (3.9)$$

С этой характеристикой закон радиоактивного распада (3.7) примет следующий вид:

$$N = N_0 e^{-t/\tau}. \quad (3.10)$$

Время, за которое распадается половина первоначального количества ядер, называется **периодом полураспада  $T_{1/2}$** . За время, равное периоду полураспада  $t = T_{1/2}$ , количество нераспавшихся ядер будет равно  $N = \frac{N_0}{2}$ . Из определения периода полураспада, на основе закона радиоактивного распада (3.7), получаем соотношение между  $T_{1/2}$  и постоянной распада  $\lambda$ :

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda \cdot T_{1/2}}.$$

Откуда

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}. \quad (3.11)$$

Важной характеристикой радиоактивного вещества является его **активность  $a$** , которая  $b$  - распаде

$$a = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N. \quad (3.12)$$

Активность  $a$  препарата равна произведению постоянной распада  $\lambda$  на число нераспавшихся ядер  $N$  и определяет число распадов, происходящих с ядрами образца за одну секунду.

Так как число нераспавшихся ядер убывает со временем по экспоненте, то и активность радиоактивного вещества также убывает по экспоненте:

$$a = \lambda \cdot N = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda t} = a_0 e^{-\lambda t}, \quad (3.13)$$

где начальная активность  $a_0 = \lambda N_0$ .

Единицей активности в системе СИ служит беккерель (Бк). 1 Бк – это активность радиоактивного препарата, при которой за одну секунду происходит один акт распада.

### Правило смещения

Преобразования ядер подчиняются так называемому правилу смещения, которое является следствием двух законов сохранения радиоактивного распада – сохранения электрического заряда и сохранения массового числа. Первый говорит о том, что сумма электрических зарядов возникающих ядер и частиц равна сумме зарядов исходных ядер и частиц. По второму закону сохранения остается неизменным суммарное массовое число до и после реакции.

При  $\alpha$ -распаде, когда ядро испускает  $\alpha$ -частицу (ядро гелия  ${}^4_2\text{He}$ ), ядро теряет положительный заряд  $2e$ , и масса его убывает на четыре атомных единицы массы. Символически  $\alpha$ -распад можно записать следующим образом:



Примером  $\alpha$ -распада может служить распад изотопа урана  ${}^{238}\text{U}$  с образованием изотопа тория  ${}^{234}\text{Th}$ :



При  $\beta$ -распаде ядро испускает электрон. В результате заряд ядра увеличивается на единицу, а масса остается практически неизменной, поэтому массовые числа возникающего и исходного ядер имеют одинаковые значения. Правило смещения для  $\beta$ -распада определится:



Таким образом, из правил смещения (3.14), (3.16) вытекает, что массовое число при  $\alpha$ -распаде уменьшается на четыре атомных единицы массы, а при  $\beta$ -распаде остается неизменным.

## Примеры решения задач

### 1. Квантовая физика

#### Пример 1.1

Определить температуру  $T$  и энергетическую светимость  $R$  абсолютно черного тела, если максимум спектральной плотности его энергетической светимости приходится на длину волны  $\lambda_m = 600$  нм. Определить значение этого максимума  $(r_\lambda)_{\max}$ .

Дано:  $\lambda_m = 600$  нм.

Найти:  $T$  – ?  $R$  – ?  $(r_\lambda)_{\max}$  – ?

#### Решение

По закону смещения Вина, длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела, обратно пропорциональна абсолютной температуре :

$$\lambda_m = \frac{b}{T} \Rightarrow T = \frac{b}{\lambda_m}. \quad (1.1.1)$$

Энергетическая светимость  $R$  абсолютно черного тела определится по закону Стефана-Больцмана

$$R = \sigma T^4. \quad (1.1.2)$$

Значение максимума спектральной плотности энергетической светимости  $(r_\lambda)_{\max}$ , согласно второму закону Вина:

$$(r_\lambda)_{\max} = CT^5. \quad (1.1.3)$$

Константы в формулах (1.1.1) – (1.1.3), соответственно, равны:  $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$  м·К,  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К),  $C = 1,3 \cdot 10^{-5}$  Вт/(м<sup>3</sup>·К<sup>5</sup>).

Подставив числовые значения, рассчитаем результат.

$$T = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-7}} = 4833 \text{ К}; \quad R = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (4833)^4 = 3,1 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2;$$

$$(r_\lambda)_{\max} = 1,3 \cdot 10^{-5} \cdot (4833)^5 = 3,4 \cdot 10^{13} \text{ Вт/м}^3.$$

Ответ:  $T = 4833$  К,  $R = 3,1 \cdot 10^7$  Вт/м<sup>2</sup>,  $(r_\lambda)_{\max} = 3,4 \cdot 10^{13}$  Вт/м<sup>3</sup>.

#### Пример 1.2

Поток излучения шарообразного светильника диаметром  $d=30$  см при некоторой постоянной температуре равен  $F=150$  Вт. Найти температуру светильника  $T$ , считая его серым телом с коэффициентом черноты  $A = 0,25$ .

Дано:  $F=150$  Вт,  $d=30$  см,  $A = 0,25$ .

Найти:  $T$  – ?

### Решение

По определению, энергетическая светимость тела связана с потоком энергии  $F$  выражением:

$$R = \frac{\Phi}{S}, \quad (1.2.1)$$

где  $S$  – площадь излучающей поверхности тела. Площадь поверхности шара

$$S = 4\pi \cdot r^2 = \pi \cdot d^2. \quad (1.2.2)$$

Энергетическая светимость  $R$  серого тела равна

$$R = A\sigma T^4, \quad (1.2.3)$$

где  $A$  - коэффициент черноты серого тела.

Приравнивая правые части формул (1.2.1) и (1.2.3), получим:

$$\frac{\Phi}{S} = A\sigma T^4 \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{\Phi}{SA\sigma}}. \quad (1.2.4)$$

Подставляем в формулу (1.1.4) выражение для площади поверхности шара (1.2.2) и получаем:

$$T = \sqrt[4]{\frac{\Phi}{\pi d^2 \cdot A\sigma}}.$$

Подставив числовые значения, рассчитаем результат:

$$T = \sqrt[4]{\frac{150}{3,14 \cdot 0,3^2 \cdot 0,25 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}}} = 440 \text{ К}.$$

Ответ:  $T = 440 \text{ К}$ .

### **Пример 1.3**

Определить максимальную скорость  $u_{\max}$  фотоэлектронов, вырываемых: 1) ультрафиолетовым излучением с длиной волны  $\lambda_1 = 0,155 \text{ мкм}$ ; 2) электромагнитным излучением с длиной волны  $\lambda_2 = 1 \text{ пм}$  с поверхности серебра. Работа выхода для серебра  $A_{\text{вых}} = 4,7 \text{ эВ}$ .

Дано:  $\lambda_1 = 0,155 \text{ мкм}$ ,  $\lambda_2 = 1 \text{ пм} = 10^{-12} \text{ м}$ ,  $A_{\text{вых}} = 4,7 \text{ эВ}$ .

Найти:  $v_{\max}$  –?

### Решение

Максимальную скорость фотоэлектронов можно определить из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\varepsilon = A_{\text{вых}} + E_{\text{кин}}. \quad (1.3.1)$$

$E_{\text{кин}}$  рассматривается как максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов, а энергия фотона вычисляется по формуле:

$$\varepsilon_0 = h\nu = hc/\lambda, \quad (1.3.2)$$

где  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с - постоянная Планка;  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с - скорость света в вакууме;  $\lambda$  - длина волны излучения. Подставляя числовые значения в (формулу 1.3.1) получим, что энергия электромагнитного излучения в первом случае  $\varepsilon_1 = 1,28 \cdot 10^{-18}$  Дж = 8 эВ; во втором -  $\varepsilon_2 = 1,99 \cdot 10^{-13}$  Дж = 1,24 МэВ.

Так как энергия фотона  $\varepsilon_1 = 1,28 \cdot 10^{-18} \times 1,6 \cdot 10^{-19} = 8$  эВ  $\ll 0,51$  МэВ - меньше энергии покоя электрона, то данный случай является нерелятивистским, и при решении задачи максимальную кинетическую энергию фотоэлектрона определим по формуле

$$E_{кин} = \frac{mv^2}{2}. \quad (1.3.3)$$

Отсюда максимальная скорость  $v_{max}$  фотоэлектронов:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2E_{кин}}{m}} = \sqrt{\frac{2(\varepsilon_1 - A_{вых})}{m}}. \quad (1.3.4)$$

$$v_{max1} = \sqrt{\frac{2(8 - 4,7) \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 1,08 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

Энергия фотона  $\varepsilon_2 = 1,99 \cdot 10^{-13} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 1,24$  МэВ  $> 0,51$  МэВ - больше энергии покоя электрона. Следовательно, максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона во втором случае будет определяться релятивистской формулой

$$E_{кин} = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (1.3.5)$$

В релятивистском случае, когда  $A_{вых} \ll \varepsilon_2$  и  $\varepsilon_2 \approx E_{кин}$ , максимальная скорость  $v_{max}$  фотоэлектронов определится из формулы (1.3.5) следующим образом:

$$v_{max} = c \frac{\sqrt{(2E_0 + \varepsilon_2) \cdot \varepsilon_2}}{E_0 + \varepsilon_2}, \quad (1.3.6)$$

где  $E_0 = m_0 c^2 = 0,51$  МэВ - энергия покоя электрона. Подставив числовые значения (энергию в формуле (1.3.6) удобнее брать в МэВ), рассчитаем результат.

$$v_{max2} = c \frac{\sqrt{(2 \cdot 0,51 + 1,24) \cdot 1,24}}{0,51 + 1,24} = 2,85 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Ответ:  $v_{max1} = 1,08 \cdot 10^6$  м/с;  $v_{max2} = 2,85 \cdot 10^8$  м/с.

#### Пример 1.4

На металлическую пластину падает монохроматический свет с длиной волны  $\lambda = 0,413$  мкм. Поток фотоэлектронов, вырывающихся с поверхности

металла, полностью задерживается, когда разность потенциалов тормозящего электрического поля достигает  $U_3=1$  В. Определить работу выхода  $A_{\text{вых}}$  и красную границу фотоэффекта  $\lambda_{\text{кр}}$ .

Дано:  $\lambda = 0,413$  мкм  $= 4,13 \cdot 10^{-7}$  м,  $U_3 = 1$  В.

Найти:  $A_{\text{вых}}$  –?  $\nu_{\text{кр}}$  –?

### Решение

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:  $\varepsilon = hc/\lambda = A_{\text{вых}} + E_{\text{кин}}$ . Выражение для задерживающего напряжения определяется из условия: работа электростатического поля по торможению электронов  $A = eU_3$  равна начальной кинетической энергии вылетающих из вещества фотоэлектронов  $E_{\text{кин}} = eU_3$ .

Отсюда  $hc/\lambda = A_{\text{вых}} + eU_3 \Rightarrow A_{\text{вых}} = hc/\lambda - eU_3$ . Подставив числовые значения, получим:

$$A_{\text{вых}} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0,413 \cdot 10^{-6}} - 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

Из определения красной границы фотоэффекта и уравнения Эйнштейна следует, что  $h\nu_{\text{кр}} = A_{\text{вых}}$ . Отсюда  $\nu_{\text{кр}} = A_{\text{вых}}/h$ .

Подставив числовые значения, получаем результат:

$$\nu_{\text{кр}} = \frac{3,2 \cdot 10^{-19}}{6,62 \cdot 10^{-34}} = 4,8 \cdot 10^{14} \text{ Гц.}$$

Ответ:  $A_{\text{вых}} = 3,2 \cdot 10^{-19}$  Дж;  $\nu_{\text{кр}} = 4,8 \cdot 10^{14}$  Гц.

### **Пример 1.5**

Пучок монохроматического света, с длиной волны  $\lambda = 662$  нм падает нормально на зеркальную плоскую поверхность. Поток энергии  $\Phi = 0,6$  Вт. Определить силу давления  $F$ , испытываемую этой поверхностью, а также число фотонов  $N$ , падающих на неё за 5 с.

Дано:  $\lambda = 662$  нм  $= 6,62 \cdot 10^{-7}$  м,  $\Phi = 0,6$  Вт,  $t = 5$  с.

Найти:  $F$  –?  $N$  –?

### Решение

По определению, сила давления на плоскую поверхность есть произведение давления  $P$  на величину поверхности  $S$ :  $F = PS$ . Давление света определяется формулой

$$P = \frac{I}{c}(1 + r),$$

где  $I$  - интенсивность света;  $r$  - коэффициент отражения;  $c$  - скорость света в вакууме. Так как поверхность зеркальная, то коэффициент отражения  $r = 1$ . Следовательно,

$$P = \frac{2I}{c}. \quad (1.5.1)$$

Связь между интенсивностью света и потоком энергии  $\Phi$  определяется выражением:

$$I = \frac{\Phi}{S}. \quad (1.5.2)$$

Подставим выражение (1.5.2) в (1.5.1)  $\Rightarrow P = \frac{2\Phi}{Sc}$ .

Тогда сила давления  $F = \frac{2\Phi}{c}$ .

Энергия излучения  $W$ , падающего на поверхность зеркала за некоторое время  $t$ , определяется через поток энергии  $W = \Phi \cdot t$ . Число фотонов, падающих на поверхность, определяется отношением энергии излучения  $W$  к энергии одного фотона  $\epsilon_0$ :  $N = \frac{W}{\epsilon_0}$ . Энергия одного фотона, падающего на

поверхность зеркала:  $\epsilon_0 = h\nu = hc/\lambda$ .

Тогда 
$$N = \frac{\Phi t \lambda}{hc}.$$

Подставив числовые значения, получаем результат:

$$F = \frac{2 \cdot 0,6}{3 \cdot 10^{-8}} = 4 \cdot 10^{-9} \text{ Н}; \quad N = \frac{0,6 \cdot 5 \cdot 6,62 \cdot 10^{-7}}{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} = 10^{19}.$$

Ответ:  $F=4 \cdot 10^{-9}$  Н;  $N = 10^{19}$  фотонов.

### Пример 1.6

Фотон с энергией  $\epsilon_0=0,75$  МэВ рассеялся на свободном электроне под углом  $\varphi = 60^\circ$ . Принимая, что кинетическая энергия и импульс электрона до соударения пренебрежимо малы, определить энергию рассеянного фотона и кинетическую энергию электрона отдачи.

Дано:  $\epsilon = 0,75$  МэВ= $1,2 \cdot 10^{-13}$  Дж,  $\varphi = 60^\circ$ .

Найти:  $e' - ?$   $w'_e - ?$

### Решение

Энергию рассеянного фотона найдем, воспользовавшись формулой Комптона:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0} (1 - \cos \theta),$$

где  $\lambda'$  и  $\lambda$  - длины волн рассеянного и падающего излучения;  $\theta$  - угол рассеяния;  $m_0$  - масса покоя электрона;  $c$  - скорость света;  $h$  - постоянная Планка. Для этого разделим правую и левую части этого равенства на  $hc$ :

$$\frac{\lambda'}{hc} - \frac{\lambda}{hc} = \frac{1}{m_0c^2}(1 - \cos\theta).$$

Так как энергия и длина волны связаны соотношением  $\varepsilon = hc/\lambda$ , то получим:

$$\frac{1}{\varepsilon'} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{m_0c^2}(1 - \cos\theta).$$

Для удобства умножим правую и левую части этого равенства на  $\varepsilon$ :

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} - 1 = \frac{\varepsilon}{m_0c^2}(1 - \cos\theta).$$

Тогда энергия рассеянного фотона будет определяться выражением:

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\frac{\varepsilon}{m_0c^2}(1 - \cos\theta) + 1}. \quad (1.6.1)$$

При подстановке численных значений можно упростить расчеты, учитывая, что величина  $m_0c^2 = 0,51$  МэВ представляет собой энергию покоя электрона. Тогда подставив в формуле (1.6.1) значения для  $m_0c^2$  и  $\varepsilon$  в МэВ, получаем:

$$\varepsilon' = \frac{0,75}{\frac{0,75}{0,51}(1 - 0,5) + 1} = 0,43 \text{ МэВ}.$$

Кинетическая энергия электрона отдачи, как следует из закона сохранения энергии,  $W'_e = \varepsilon - \varepsilon'$ . Подставив числовые значения, получаем результат.

Ответ:  $\varepsilon' = 0,43$  МэВ;  $W'_e = 0,32$  МэВ.

### Пример 1.7

Электрон в атоме водорода находится на четвертом энергетическом уровне ( $n = 4$ ). Определить, радиус орбиты электрона  $r$ , кинетическую  $E_{кин}$ , потенциальную  $E_{пот}$  и полную энергии  $E_n$ . Определить энергию фотона  $\varepsilon$ , испущенного при переходе электрона на второй энергетический уровень ( $m = 2$ ).

Дано:  $n = 4$ ,  $m = 2$ .

Найти:  $v$  -?  $r$  -?  $E_{кин}$  -?  $E_{пот}$  -?  $E_n$  -?  $\varepsilon$  -?

#### Решение

Радиус орбиты  $r_n$  электрона в атоме водорода определяется выражением:

$$r_n = \frac{n^2 h^2 \varepsilon_0}{\pi e^2 m_e} = n^2 \cdot r_1,$$

где  $r_1 = \frac{h^2 \varepsilon_0}{\pi e^2 m_e} = 0,529 \cdot 10^{-10}$  м - первый борковский радиус.

Следовательно, радиус орбиты на четвертом энергетическом уровне ( $n = 4$ ):

$$r_4 = 4^2 \cdot 0,529 \cdot 10^{-10} = 8,46 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Полная энергия :

$$E_n = -\frac{e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} = -\frac{1}{n^2} E_{\text{ион}},$$

где  $E_{\text{ион}}$  - энергия ионизации атома водорода  $E_{\text{ион}} = 13,53$  эВ. Подставляя значения  $n = 4$  в формулу для полной энергии, получим:

$$E_4 = -\frac{1}{4^2} \cdot 13,53 = -0,86 \text{ эВ.}$$

$$\text{Кинетическая энергия : } E_{\text{кин}} = \frac{m_e v_n^2}{2}$$

$$\text{Потенциальная энергия : } E_{\text{пот}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r} = -2E_{\text{кин}}.$$

Из формул для кинетической и потенциальной энергий следует, что потенциальная энергия электрона в атоме водорода отрицательна по знаку и по модулю в 2 раза больше его кинетической энергии. Так как полная энергия есть сумма кинетической и потенциальной энергий, то легко получить, что  $E_{\text{пот}} = 2 \cdot E_n$ ,  $E_{\text{кин}} = -E_n$ .

Энергия испускаемого фотона :

$$\epsilon = E_n - E_m = \frac{e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 h^2} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = E_{\text{ион}} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Подставив числовые значения, получим результат.

$$\epsilon = 13,53 \cdot \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) = 2,53 \text{ эВ.}$$

**Ответ:**  $r_4 = 8,46 \cdot 10^{-10}$  м,  $E_n = -0,86$  эВ,  $E_{\text{кин}} = 0,86$  эВ,  $E_{\text{пот}} = -1,72$  эВ,  $\epsilon = 2,53$  эВ.

### Пример 1.8

Кванты излучения выбивают из атома водорода, находящегося в основном состоянии, электроны с кинетической энергией  $E_{\text{кин}} = 5$  эВ. Определить частоту излучения.

Дано:  $E_{\text{кин}} = 5$  эВ.

Найти:  $\nu = ?$

### Решение

Кинетическая энергия выбиваемого электрона определяется разностью между энергией кванта излучения и энергией ионизации:

$$E_{кин} = h\nu - E_{ион},$$

где  $E_{ион}=13,53$  эВ. Отсюда  $\nu = \frac{E_{ион} - E_{кин}}{h}$ . Подставив числовые значения энергий в электрон-вольтах, получим:

$$E_{ион} - E_{кин} = 13,53 - 5 = 8,53 \text{ эВ.}$$

Переведем в Джоули:  $E_{ион} - E_{кин} = 8,53 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 1,36 \cdot 10^{-18}$  Дж.

$$\text{Тогда } \nu = \frac{1,36 \cdot 10^{-18}}{6,62 \cdot 10^{-34}} = 2,06 \cdot 10^{15} \text{ Гц.}$$

Ответ:  $\nu = 2,06 \cdot 10^{15}$  Гц.

### Пример 1.9

Определить период вращения электрона  $T$  на третьем энергетическом уровне ( $n = 3$ ) атома водорода в теории Бора.

Дано:  $n = 3$ .

Найти:  $T$  –?

### Решение

В модели Бора атома водорода электрон движется по круговой орбите радиусом  $r$  со скоростью  $v$ . Период вращения электрона (это время одного оборота) определится как отношение длины окружности к скорости движения:

$$T = \frac{2\pi \cdot r_n}{v_n}.$$

Радиус орбиты  $r_n$  электрона в атоме водорода определяется выражением:

$$r_n = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{\pi e^2 m_e} = n^2 \cdot r_1,$$

где  $r_1 = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi e^2 m_e} = 0,529 \cdot 10^{-10}$  м - первый боровский радиус.

Отсюда  $r_3 = 0,529 \cdot 10^{-10} \cdot 3^2 = 4,761 \cdot 10^{-10}$  м.

Скорость движения электрона на орбите с номером  $n$ :

$$v_n = \frac{n\hbar}{m_e r_n}.$$

Для орбиты с  $n=3$  скорость равна  $v_3 = \frac{3 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 4,761 \cdot 10^{-10}} = 7,27 \cdot 10^5$  м/с.

Поставив значения радиуса и скорости в формулу для периода, получим:

$$T = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 4,761 \cdot 10^{-10}}{7,27 \cdot 10^5} = 4,11 \cdot 10^{-15} \text{ с.}$$

Ответ:  $T = 4,11 \cdot 10^{-15}$  с.

### **Пример 1.10**

Определить энергию  $\varepsilon$  фотона, соответствующего третьей линии в первой инфракрасной серии (серии Пашена) спектра атома водорода.

Дано:  $n = 6, m = 3$ .

Найти:  $\varepsilon$  –?

### Решение

Энергия испускаемого фотона атомом водорода при переходе с орбиты номер  $n$  на орбиту с номером  $m$  определяется:

$$\varepsilon = E_n - E_m = E_{\text{ион}} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где  $E_{\text{ион}}$  - энергия ионизации атома водорода  $E_{\text{ион}} = 13,53$  эВ.

Первая инфракрасная серия (серия Пашена) соответствует переходам электрона с орбиты номер  $n=4,5,6,\dots$  на орбиту номер  $m=3$ . Так, первая линия этой серии соответствует переходу электрона с орбиты номер  $n=4$  на орбиту номер  $m=3$ . Третья линия в первой инфракрасной серии спектра атома водорода соответствует переходу электрона с орбиты номер  $n=6$  на орбиту номер  $m=3$ .

Таким образом, энергия испускаемого фотона равна:

$$\varepsilon = 13,53 \cdot \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{6^2} \right) = 1,13 \text{ эВ}.$$

Ответ:  $\varepsilon = 1,13$  эВ.

### **Пример 1.11**

Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов  $U$ . Найти длину волны де Бройля электрона для двух случаев: 1)  $U_1 = 51$  В; 2)  $U_2 = 510$  кВ.

Дано:  $U_1 = 51$  В,  $U_2 = 510$  кВ.

Найти:  $\lambda_1 = ? \lambda_2 = ?$

### Решение

Длина волны де Бройля определяется формулой де Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (1.11.1)$$

где  $h$  - постоянная Планка;  $p$  – импульс электрона.

Импульс частицы можно определить, если известна его кинетическая энергия  $E_k$ . Связь импульса с кинетической энергией различна для нерелятивистского случая (когда кинетическая энергия частицы много меньше

ее энергии покоя) и для релятивистского случая (когда кинетическая энергия сравнима с энергией покоя частицы).

В нерелятивистском случае

$$p = \sqrt{2m_0 E_k}, \quad (1.11.2)$$

где  $m_0$  – масса покоя частицы.

В релятивистском случае:

$$p = \frac{\sqrt{(2E_0 + E_k)E_k}}{c}, \quad (1.11.3)$$

где  $E_0 = m_0 c^2$  – энергия покоя частицы. Формула (1.11.1) с учетом (1.11.2) и (1.11.3) запишется:

в нерелятивистском случае:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_k}}, \quad (1.11.4)$$

в релятивистском:

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{(2E_0 + E_k)E_k}}. \quad (1.11.5)$$

Сравним кинетические энергии электрона, прошедшего заданные в условии задачи разности потенциалов  $U_1=51$  В и  $U_2=510$  кВ, с энергией покоя электрона и в зависимости от этого решим, какую из формул (1.11.4) или (1.11.5) следует применить для вычисления длины волны де Бройля.

Как известно, кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов  $U$ , равна  $E_k=eU$ .

В первом случае  $E_1=eU_1=51\text{эВ}=0,51\cdot 10^{-4}$  МэВ, что много меньше энергии покоя электрона  $m_0 c^2=0,51$  МэВ. Следовательно, в этом случае можно применить формулу (1.11.4):

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_1}},$$

где  $m_0=9,1\cdot 10^{-31}$  кг – масса покоя электрона.

Подставляя числовые значения (энергия – в Джоулях), получим  $\lambda_1=1,71\cdot 10^{-10}$  м.

Во втором случае кинетическая энергия электрона  $E_2=eU_2=0,51$  МэВ, то есть равна энергии покоя электрона  $m_0 c^2=0,51$  МэВ. Следовательно, в этом случае необходимо применить формулу (1.11.5):

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\sqrt{(2E_0 + E_2)E_2}}.$$

Подставив числовые значения, получим результат.

Ответ:  $\lambda_1=1,71\cdot 10^{-10}$  м,  $\lambda_2=1,4\cdot 10^{-12}$  м.

### Пример 1.12

Найти длину волны де Бройля  $\lambda$  для атома водорода, движущегося при температуре  $T = 293$  К с наиболее вероятной скоростью. Какое количество энергии  $\Delta E$  необходимо отнять у атома, чтобы его длина волны де Бройля увеличилась вдвое?

Дано:  $T = 293$  К,  $\lambda_2 = 2\lambda$ .

Найти:  $\lambda = ?$   $\Delta E = ?$

#### Решение

Наиболее вероятная скорость движения атома определяется температурой газа:

$$v = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}, \quad (1.12.1)$$

где  $m_0 = 1,66 \cdot 10^{-27}$  кг – масса атома водорода,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К.

Скорость движения атомов при такой температуре относительно невелика, поэтому импульс атома можно определить по нерелятивистской формуле

$$p = m_0 \cdot v = \sqrt{2kTm_0}. \quad (1.12.2)$$

Длина волны де Бройля определяется выражением:  $\lambda = \frac{h}{p}$ . Отсюда

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2kTm_0}}. \quad (1.12.3)$$

Связь между длиной волны де Бройля и кинетической энергией в нерелятивистском случае определяется формулой  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_k}}$ . Отсюда

$$E_k = \frac{h^2}{2\lambda^2 m_0}. \quad (1.12.4)$$

Из формулы (4) следует, что при увеличении длины волны де Бройля вдвое, кинетическая энергия атома уменьшается в четыре раза:

$$E_{k2} = \frac{h^2}{2(2\lambda)^2 m_0} = \frac{1}{4} E_k.$$

Количество энергии  $\Delta E$ , которое необходимо отнять у атома для увеличения длины волны вдвое, определится:

$$\Delta E = E_k - E_{k2} = E_k - \frac{1}{4} E_k = \frac{3}{4} E_k = \frac{3}{4} \frac{h^2}{2\lambda^2 m_0} = \frac{3}{8} \frac{h^2}{\lambda^2 m_0} = \frac{3}{8} \frac{h^2}{(1,8 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}} = \frac{1333}{44422} \frac{h^2}{m_0} = \frac{1}{4} m_0 v^2 = kT.$$

Подставив числовые значения, получим результат.

Ответ:  $\lambda = 1,8 \cdot 10^{-10}$  м,  $\Delta E = 6,1 \cdot 10^{-21}$  Дж.

### Пример 1.13

Масса движущегося электрона в три раза больше его массы покоя. Чему равна минимальная неопределенность координаты электрона?

Дано:  $m = 3m_0$ ,  $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг.

Найти:  $\Delta x_{min} = ?$

#### Решение

Согласно соотношению неопределенности Гейзенберга:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{2\pi},$$

где  $\Delta x$  и  $\Delta p_x$  – неопределенности координаты и импульса частицы,  $h = 2\pi\hbar$  – постоянная Планка.

Учитывая, что  $p = m \cdot v$ , где  $m$  – масса,  $v$  – скорость частицы, неопределенность координаты можно представить в виде  $\Delta x \geq \frac{h}{2\pi m \Delta v_x}$ .

Поскольку неопределенность скорости  $\Delta v_x$ , как и сама скорость, не может превышать скорость света  $c$  в вакууме, то  $\Delta x_{min} = \frac{h}{2\pi m c}$ . С учетом условия

$$m = 3m_0 \text{ получаем } \Delta x_{min} = \frac{h}{6\pi m_0 c}.$$

Подставив числовые значения, получим результат:

$$\Delta x_{min} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}}{6 \cdot 3,14 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} = 1,28 \cdot 10^{-13} \text{ м}.$$

Ответ:  $\Delta x_{min} = 1,28 \cdot 10^{-13}$  м.

### Пример 1.14

Кинетическая энергия электрона в атоме водорода равна 10 эВ. Используя соотношение неопределённости, оценить минимальные линейные размеры атома.

Дано:  $E_k = 10 \text{ эВ}$ ,  $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг.

Найти:  $d = ?$

#### Решение:

Размеры атома характеризуются диаметром  $d$ . Тогда максимальное значение неопределенности координаты  $\Delta x$  для электрона в атоме водорода

$$\Delta x = \frac{d}{2}. \text{ Из соотношения неопределенностей } \Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar; \quad d \geq \frac{2\hbar}{\Delta p_x}.$$

Физически разумная неопределённость импульса не должна превышать самого импульса  $\Delta p_x = p_x$ . Импульс находим из связи с кинетической энергией

$$p_x = \sqrt{2m_0 E_k},$$

где  $m_0$  – масса электрона. Переходя от неравенства к равенству, получим:

$$d = \frac{2\mathbf{h}}{\sqrt{2m_0 E_k}}.$$

Подставив числовые значения, получим результат.

Ответ:  $d = 1,24 \cdot 10^{-10}$  м.

### Пример 1.15

Используя соотношение неопределённости, оценить энергию основного состояния атома водорода.

Дано:  $n = 1$ .

Найти:  $E_1 = ?$

### Решение

Энергию электрона в атоме водорода определим как сумму кинетической и потенциальной энергий:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{p^2}{2m} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (1.15.1)$$

где  $\frac{p^2}{2m}$  - кинетическая энергия электрона, выраженная через импульс  $p$ ;

$(-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r})$  - потенциальная энергия электростатического взаимодействия электрона с ядром.

Для того чтобы воспользоваться классическим выражением для энергии электрона (1.15.1) в квантовой теории, будем рассматривать величины  $p$  и  $r$  как неопределенности соответственно импульса и координаты электрона. Тогда соотношение неопределенностей будет выглядеть как:

$$pr = \mathbf{h}. \quad (1.15.2)$$

Выразив координаты электрона  $r$  из формулы (1.15.2) и подставив в (1.15.1), получим энергию электрона как функцию импульса:

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{q^2 p}{4\pi\epsilon_0 \mathbf{h}}. \quad (1.15.3)$$

Данное выражение энергии (1.15.3) имеет минимальное значение при некотором значении импульса  $p_1$ , которое будет соответствовать основному состоянию атома. Для определения минимального значения энергии приравняем производную  $\frac{dE}{dp}$  нулю:

$$\frac{dE}{dp} = \frac{p_1}{m} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \mathbf{h}} = 0.$$

Отсюда находим значение импульса  $p_1$ :

$$p_1 = \frac{mq^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}. \quad (1.15.4)$$

Зная величину  $p_1$ , определяем оценки значений радиуса орбиты и энергии основного состояния атома водорода:

$$r_1 = \frac{\hbar}{p_1} = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{mq^2} \quad \text{и} \quad E_1 = -\frac{mq^4}{8\pi\epsilon_0\hbar^2}. \quad (1.15.5)$$

Оценки (1.15.5) полностью совпадают с результатами теории Бора атома водорода. Данное совпадение скорее случайное, всерьез следует лишь воспринимать порядок величин, полученных с помощью соотношения неопределенностей.

Ответ:  $E_1 = -\frac{mq^4}{8\pi\epsilon_0\hbar^2} = -13,53 \text{ эВ}.$

### Пример 1.16

Электрон находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной  $l$ . Вычислить вероятность  $W$  того, что электрон, находящийся в возбужденном состоянии ( $n=2$ ), будет обнаружен в средней трети ямы.

Дано:  $n=2, l/3 < x < 2l/3$ .

Найти:  $W=?$

### Решение

Вероятность обнаружения частицы в интервале от  $x_1$  до  $x_2$  определяется по

формуле: 
$$W = \int_{x_1}^{x_2} \Psi_n(x)^2 dx.$$

Волновая функция  $\Psi_n(x)$  частицы, находящейся в бесконечно глубокой потенциальной яме, равна:

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

В данном случае частица находится в средней трети ямы, то есть  $l/3 < x < 2l/3$ .

Подставим это выражение в формулу для определения вероятности:

$$W = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2\left(\frac{2\pi}{l}x\right) dx.$$

По формуле приведения заменим квадрат синуса косинусом двойного аргумента:  $\sin^2\left(\frac{2\pi}{l}x\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{4\pi}{l}x\right)\right)$  и разобьем интеграл на два.

$$W = \frac{22 \cdot 4 \cdot 10^{-32}}{3 \cdot 3} \left( \sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right) = 0,195.$$

Ответ:  $W = 0,195$ .

### Пример 1.17

Частица находится в бесконечной глубокой, одномерной, прямоугольной потенциальной яме шириной 0,1 нм. Найти разность  $\Delta E_{n,n+1}$  соседних энергетических уровней частицы для  $n = 3$ .

Дано:  $n=3, l=0,1$  нм.

Найти:  $\Delta E_{n,n+1}=?$

### Решение

Энергия электрона в бесконечно глубокой потенциальной яме в стационарном состоянии с номером  $n$  определяется выражением:  $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2$ ,

где  $m$  - масса частицы;  $l$  - ширина потенциальной ямы.

Отсюда разность соседних энергетических уровней равна:

$$\Delta E_{n,n+1} = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (n+1)^2 - \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} 2n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{ml^2} n.$$

Подставив числовые значения, получим результат.

Ответ:  $\Delta E_{n,n+1} = 3,66 \cdot 10^{-19}$  Дж = 226 эВ.

### Пример 1.18

Найти длину волны фотона  $\lambda$ , который может быть испущен электроном, находящимся в бесконечной глубокой, одномерной, прямоугольной потенциальной яме на втором энергетическом уровне. Ширина потенциальной ямы  $l=0,3$  нм.

Дано:  $n=2, l=0,3$  нм.

Найти:  $\lambda = ?$

### Решение

Испускание фотона происходит при переходе электрона, находящегося в возбужденном состоянии, на энергетические уровни с меньшей энергией. В данном случае электрон переходит с энергетического уровня с квантовым числом  $n=2$  на уровень с  $n=1$ .

Энергия испускаемого фотона  $\varepsilon$  в результате такого перехода равна:

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = E_2 - E_1. \quad (1.18.1)$$

Энергия электрона, находящегося в бесконечной глубокой, одномерной, прямоугольной потенциальной яме на энергетическом уровне с квантовым числом  $n$  равна

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2, \quad (1.18.2)$$

где  $m$  - масса частицы;  $l$  - ширина потенциальной ямы.

Подставляя формулу (1.18.2) в выражение (1.18.1), получим:

$$\frac{hc}{\lambda} = E_2 - E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (2^2 - 1) = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}. \quad (1.18.3)$$

Учитывая, что  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ , из формулы (1.18.3) получаем окончательное выражение для длины волны фотона  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{8ml^2 c}{3h}. \quad (1.18.4)$$

Подставив числовые значения, получим результат

$$\lambda = \frac{8 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 3 \cdot 10^8}{3 \cdot 6,62 \cdot 10^{-34}} = 10^{-7} \text{ м.}$$

Ответ:  $\lambda = 10^{-7}$  м.

### Пример 1.19

Электрон с энергией 5 эВ движется в положительном направлении оси  $x$ , встречая на своем пути прямоугольный потенциальный барьер высотой  $U = 10$  эВ и шириной  $l = 0,1$  нм. Определить вероятность  $W$  прохождения частицы через барьер.

Дано:  $E = 5$  эВ,  $U = 10$  эВ,  $l = 0,1$  нм,  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг.

Найти:  $W = ?$

### Решение

Вероятность  $W$  обнаружить частицу в области за потенциальным барьером прямоугольной формы определяется следующей формулой:

$$W = \exp\left[-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)}\right],$$

где  $m$  – масса частицы;  $E$  – ее энергия;  $l$  - ширина барьера;  $U$  – ее высота.

Подставив числовые значения, получим:

$$W = \exp\left(-\frac{2 \cdot 10^{-10} \cdot \sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (10 - 5) \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}}{1,05 \cdot 10^{-34}}\right) = 0,1.$$

При подстановке числовых значений необходимо перевести все величины в систему СИ. Например, энергия в эВ переводится в Дж:  $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж.

Ответ:  $W = 0,1$ .

### Пример 1.20

Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов  $\Delta\phi = 50$  В, встречает на своем пути прямоугольный потенциальный барьер шириной  $l = 0,896$  нм. Определить высоту потенциального барьера  $U$ , если вероятность  $W$  прохождения протона через него составляет 0,01.

Дано:  $\Delta\phi = 50$  В,  $l = 0,896$  нм,  $W = 0,01$ ,  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг.

Найти:  $U = ?$

#### Решение:

Энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов  $\Delta\phi$ , определится:  $E = q\Delta\phi = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 50 = 8 \cdot 10^{-18}$  Дж = 50 эВ.

Вероятность прохождения частицы через потенциальный прямоугольный барьер  $W$  равна:

$$W = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} l \sqrt{2m \cdot (U - E)}\right),$$

где  $m$  – масса частицы;  $E$  – ее энергия;  $l$  – ширина барьера;  $U$  – ее высота.

Потенцируя это выражение, получим:  $\ln W = -\frac{2}{\hbar} l \sqrt{2m \cdot (U - E)}$ .

Откуда  $U - E = \frac{11 \ln \hbar \cdot W}{2 \ln l}^2 = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж = 1 эВ.

Высота  $U$  потенциального барьера будет равна 51 эВ.

Ответ:  $U = 51$  эВ.

### Пример 1.21

Записать возможные значения квантовых чисел  $n, l, m, s$  для электрона атома водорода в состоянии  $3p$ . Определить максимальные значения орбитального момента импульса,  $z$ -проекции момента импульса и энергии электрона в этом состоянии.

Дано: состояние  $3p$ .

Найти:  $n = ?$ ,  $l = ?$ ,  $m = ?$ ,  $s = ?$

#### Решение

В обозначении состояния  $3p$  цифра 3 соответствует главному квантовому числу, т.е.  $n = 3$ . Буквой  $p$  обозначается состояние с орбитальным квантовым числом  $l = 1$ . Магнитное квантовое число  $m$  может принимать значения  $m = -l, -l+1, \dots, 0, \dots, l-1, l$ . Для данного состояния возможные значения магнитного квантового числа будут от  $-1$  до  $1$ . Следовательно,  $m = -1, 0, 1$ .

Энергия электрона в атоме водорода определяется выражением:

$$E_n = -\frac{e^4 m_e}{8 \epsilon_0^2 h^2 n^2} = -\frac{1}{n^2} E_{\text{ион}},$$

где  $E_{\text{ион}}$  – энергия ионизации атома водорода  $E_{\text{ион}} = 13,53$  эВ.

Так как  $n=3$ , то, подставив числовые значения, получим:  $E_3 = -1,5$  эВ. Орбитальный момент импульса электрона в атоме водорода определяется выражением:  $L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ . Так как  $l=1$ , то  $L=1,4\hbar$ .

$z$ - проекция момента импульса  $L_z = m \cdot \hbar$ . Максимальное значение магнитного момента  $m=1$ . Следовательно, максимальное значение  $Z$ -проекции момента импульса равно  $\hbar$ .

Ответ:  $n = 3$ ,  $l = 1$ ,  $m = -1, 0, 1$ .  $E_3 = -1,5$  эВ.  $L = 1,4\hbar$ .  $L_z = \hbar$ .

### Пример 1.22

Электрон в атоме водорода находится в  $1s$ -состоянии. При поглощении фотона с энергией  $\varepsilon = 12,1$  эВ электрон перешел в возбужденное состояние с максимально возможным значением орбитального квантового числа. Определить изменение орбитального момента импульса электрона.

Дано: состояние  $1s$ ,  $l_1 = 0$ ,  $\varepsilon = 12,1$  эВ,  $l_2$  – максимальное.

Найти:  $\Delta L = ?$

#### Решение:

Изменение орбитального момента импульса электрона  $\Delta L$  равно разности его значений в конечном  $L_2$  и начальном  $L_1$  состояний. Орбитальный момент импульса электрона в атоме водорода определяется выражением:

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)}. \quad (1.22.1)$$

Так как начальное  $1s$ -состояние, то ему соответствует орбитальное квантовое число  $l_1 = 0$ . Соответственно и орбитальный момент импульса в этом состоянии равен  $L_1 = 0$ , а главное квантовое число в  $1s$ -состоянии  $n=1$ . Для того чтобы определить орбитальный момент импульса в конечном состоянии  $L_2$ , необходимо знать значение орбитального квантового числа  $l_2$ , которое определяется через главное квантовое число  $n$ .

Энергия испускаемого фотона атомом водорода при переходе с  $1s$ -состояния на орбиту с главным квантовым числом  $n$  определяется:

$$\varepsilon = E_{\text{ион}} \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (1.22.2)$$

где  $E_{\text{ион}}$  - энергия ионизации атома водорода  $E_{\text{ион}} = 13,53$  эВ.

Из формулы (1.22.2) следует

$$n = \sqrt{\frac{E_{\text{ион}}}{E_{\text{ион}} - \varepsilon}} = \sqrt{\frac{13,53}{13,53 - 12,1}} = 3. \quad (1.22.3)$$

Максимально возможное значение орбитального квантового числа с главным квантовым числом  $n = 3$  равно 2, т.к. орбитальное квантовое число может принимать целочисленные значения  $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

Орбитальный момент импульса электрона в конечном состоянии  $L_2$  определится:

$$L_2 = \hbar \sqrt{2(2+1)} = \sqrt{6}\hbar = 2,57 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}\cdot\text{с}.$$

Следовательно, изменение орбитального момента импульса электрона  $\Delta L = 2,57 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}\cdot\text{с}$ .

Ответ:  $\Delta L = 2,57 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}\cdot\text{с}$ .

## 2. Физика твердого тела

### Пример 2.1

Вычислить энергию Ферми  $E_F$  для меди при  $T=0 \text{ К}$ , учитывая, что на один атом меди приходится один свободный электрон ( $N_1=1$ ). Плотность меди  $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , молярная масса  $M = 64 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ .

Дано:  $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , молярная масса  $M = 64 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ .

Найти:  $E_F = ?$

### Решение

Зависимость энергии Ферми  $E_F$  при  $T=0 \text{ К}$  в от концентрации свободных электронов  $n$  определяется следующим выражением:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2 \cdot m} (3p^2)^{2/3}, \quad (2.1.1)$$

где  $m$  – масса электрона;  $\hbar$  – постоянная Планка.

Полагая, что число свободных электронов равно числу атомов меди ( $N_1=1$ ), найдём концентрацию свободных электронов. По определению концентрация атомов есть число атомов в единице объема:  $n = \frac{N}{V}$ , где число атомов  $N$

определится  $N = \frac{m}{M} N_A$ ,

где  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$  – число Авогадро – число молекул (атомов) в одном моле вещества.

Тогда концентрация свободных электронов определится

$$n = \frac{m N_A}{M V} \quad (2.1.2)$$

В том случае, если на один атом вещества будет приходится  $N_1$  свободных электронов, то формула (2.1.2) примет вид

$$n = \frac{\rho}{M} N_A N_1.$$

Подставляя формулу (2.1.2) в выражение (2.1.1), получим:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( 3\pi^2 \rho \frac{N_A}{M} \right)^{2/3}.$$

Подставив числовые значения, найдём энергию Ферми:

$$E_F = \frac{(1,05 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} \left( 3 \cdot 3,14^2 \cdot 8,9 \cdot 10^3 \frac{6,02 \cdot 10^{23}}{64 \cdot 10^{-3}} \right)^{2/3} = 1,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 7,4 \text{ эВ}.$$

Ответ:  $E_F = 1,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 7,4 \text{ эВ}$ .

### Пример 2.2

Кристалл кремния нагревают от  $t_1=0^\circ\text{C}$  до  $t_2=10^\circ\text{C}$ . Во сколько раз возрастёт его электропроводность, если ширина запрещенной зоны кремния  $E_3 = 1,1\text{эВ}$ ?

Дано:  $t_1=0^\circ\text{C}$ ,  $t_2=10^\circ\text{C}$ ,  $E_3 = 1,1\text{эВ} = 1,76 \cdot 10^{-19}\text{Дж}$ .

Найти:  $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = ?$

#### Решение

Удельная электропроводность чистого полупроводника определяется формулой

$$\sigma = \sigma_0 \cdot e^{-\frac{E_3}{2kT}},$$

где  $E_3$  – ширина запрещенной зоны,  $k$  – постоянная Больцмана.

Переведем температуру в кельвин:  $T_1=t_1+273=273 \text{ К}$ ;  $T_2=t_2+273=283 \text{ К}$ .

Отношение электропроводности  $\sigma_2$  при температуре  $T_2$  к электропроводности  $\sigma_1$  при температуре  $T_1$  определится:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\sigma_0 e^{-\frac{E_3}{2kT_2}}}{\sigma_0 e^{-\frac{E_3}{2kT_1}}} = e^{\frac{E_3}{2k} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)}.$$

Подставив числовые значения, получим результат.

Ответ:  $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 2,28$ .

### Пример 2.3

На какую величину от энергии Ферми  $\Delta E$  отличается энергия состояния, вероятность заполнения которого при  $T = 300 \text{ К}$  равна 0,01?

Дано:  $T=300 \text{ К}$ ,  $f(E)=0,01$ ,  $E_3 = 1,1\text{эВ} = 1,76 \cdot 10^{-19}\text{Дж}$ .

Найти:  $\Delta E = ?$

### Решение

Вероятность  $f(E)$  того, что квантовое состояние с энергией  $E$  при температуре  $T$  занято электроном:

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{(E-E_F)/kT}}, \quad (2.3.1)$$

где  $E_F$  – энергия Ферми при температуре  $T$ ;  $k$  – постоянная Больцмана.

Так как разность энергий  $\Delta E = E - E_F$ , то можно записать, что

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\Delta E/kT}}.$$

Отсюда:  $\Delta E = kT \ln \left( \frac{1}{f(E)} - 1 \right) = kT \ln \left( \frac{1}{0,01} - 1 \right)$

Подставив числовые значения, получаем

$$\Delta E = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot \ln \left( \frac{1 - 0,01}{0,01} \right) = 0,192 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 0,12 \text{ эВ}.$$

Ответ:  $\Delta E = 0,12 \text{ эВ}$ .

## 3. Физика атомного ядра

### **Пример 3.1**

Вычислить дефект массы  $\Delta m$ , энергию связи  $E_{\text{св}}$  и удельную энергию связи  $\delta E_{\text{св}}$  ядра  ${}^{16}_8\text{O}$ .

Дано:  $A=16, Z=8$ .

Найти:  $\Delta m = ? E_{\text{св}} = ? \delta E_{\text{св}} = ?$

### Решение

Дефект массы  $\Delta m$  ядра определяется по формуле

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}, \quad (3.1.1)$$

где  $Z$  – зарядовое число;  $A$  – массовое число;  $m_p$  – масса протона;  $m_n$  – масса нейтрона;  $m_{\text{я}}$  – масса ядра.

В справочной таблице приведены массы нейтральных атомов  $m_a$ , поэтому формулу (3.1.1) для дефекта масс можно преобразовать так, чтобы в нее входила масса нейтрального атома  $m_a$ . Для этого в правой части формулы (3.1.1) прибавим и отнимем  $Z \cdot m_e$ :

$$\Delta m = Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n - (m_{\text{я}} + Z \cdot m_e). \quad (3.1.2)$$

Сумма масс протона  $m_p$  и электрона  $m_e$  равна массе изотопа  ${}^1_1\text{H}$ , а сумма масс ядра и  $Z$  электронов равна массе атома  $m_{\text{я}} + Z \cdot m_e = m_a$ .

Тогда формула (3.1.2) примет вид:

$$\Delta m = Z \cdot {}^1_1H + (A - Z)m_n - m_a. \quad (3.1.3)$$

Из таблицы следует, что масса изотопа  ${}^{16}_8O$  равна  $m_a = 15,99491$  а. е. м. Так как  $1$  а. е. м. =  $1,66 \cdot 10^{-27}$  кг, то масса атома  $m_a = 26,5516 \cdot 10^{-27}$  кг.

С учетом того, что массы водорода и нейтрона соответственно:  $m_p = 1,6731 \cdot 10^{-27}$  кг и  $m_n = 1,6749 \cdot 10^{-27}$  кг, получим результат для дефекта масс:  $\Delta m = 0,2284 \cdot 10^{-27}$  кг.

$$\text{Энергия связи } E_{св} = \Delta m \cdot c^2,$$

где  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с – скорость света в вакууме. Удельная энергия связи  $\delta E_{св} = \frac{E_{св}}{A}$ .

Подставив числовые значения, получим результат.

$$\text{Ответ: } \Delta m = 0,2284 \cdot 10^{-27} \text{ кг; } E_{св} = 128 \text{ МэВ; } \delta E_{св} = 8 \text{ МэВ.}$$

### Пример 3.2

Вычислить энергетический эффект ядерной реакции  ${}^4_2He + {}^4_2He \rightarrow p + {}^7_3Li$ .

Дано:  ${}^4_2He + {}^4_2He \rightarrow p + {}^7_3Li$ .

Найти:  $Q = ?$

#### Решение

Энергия ядерной реакции определяется по формуле

$$Q = ([m_X + m_a] - [m_Y + m_b])c^2$$

При расчете энергии ядерных реакций в МэВ массы удобнее брать в а. е. м., тогда формулу для энергии можно записать в виде:

$$Q = 931([m_X + m_a] - [m_Y + m_b]).$$

Для данной задачи:

$$Q = 931([m_{He} + m_{He}] - [m_p + m_{Li}]).$$

При вычислении энергии ядерной реакции можно использовать вместо масс их ядер массы атомов.

Из справочных данных находим:

$$m_{He} = 4,00260 \text{ а. е. м.; } m_p = 1,00783 \text{ а. е. м.; } m_{Li} = 7,01601 \text{ а. е. м.}$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$Q = 931 \cdot (-0,01864 \text{ а. е. м.}) = -17,3 \text{ МэВ.}$$

Поскольку  $Q < 0$ , энергия в результате реакции поглощается.

$$\text{Ответ: } Q = -17,3 \text{ МэВ.}$$

### Пример 3.3

Определить, сколько ядер в  $m_0 = 1$  мг изотопа церия  ${}^{144}_{58}Ce$  распадётся в течение времени: 1) 1с; 2) 1год. Период полураспада цезия 285 суток.

Дано:  $m_0=1 \text{ мг}=10^{-6} \text{ кг}$ ,  $T_{1/2}=285 \text{ суток}$ ,  $t_1=1 \text{ с}$ ,  $t_2=1 \text{ год}$

Найти:  $\Delta N_1=?$   $\Delta N_2=?$

### Решение

1) Так как  $t_1 \ll T_{1/2}$ , то формулу (3.6), приведенную на странице 52, можно записать в упрощенном виде:  $\Delta N_1 = \lambda N_0 t_1$ . Постоянная распада  $\lambda$  связана с периодом полураспада соотношением  $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ .

Начальное число ядер в препарате массой  $m$  определяется выражением:

$$N_0 = \frac{m_0}{M} N_A,$$

где  $N_A=6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$  – число Авогадро;  $M=140,12 \cdot 10^3 \text{ кг/моль}$  – молярная масса церия.

Отсюда: 
$$\Delta N_1 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{m}{M} N_A t_1.$$

Подставив числовые значения, получим результат.

2)  $t_2$  и  $T_{1/2}$  – величины одного порядка, поэтому:  $\Delta N_2 = N_0 - N$ .

С учетом выражения (3.8) на стр.52 :

$$\Delta N_2 = N_0 (1 - e^{-\lambda t_2}) = \frac{m N_A}{M} \left( 1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t_2} \right).$$

Подставив числовые значения, получим результат.

Ответ:  $\Delta N_1=1,2 \cdot 10^{11}$ ;  $\Delta N_2=2,5 \cdot 10^{18}$ .

### **Пример 3.4**

Определить начальную активность  $a_0$  радиоактивного препарата магния  ${}_{12}^{27}\text{Mg}$  массой  $0,2 \cdot 10^{-9} \text{ кг}$ , а также его активность  $a$  через 6 часов. Период полураспада равен 10 мин.

Дано:  $m_0 = 0,2 \cdot 10^{-9} \text{ кг}$ ,  $T_{1/2}=10 \text{ мин} = 600 \text{ с}$ ,  $t = 6 \text{ час} = 21600 \text{ с}$

Найти:  $a_0=?$   $a=?$

### Решение

Активность препарата  $a$  в момент времени  $t$  определяется выражением (3.13) (стр.53):

$$a = a_0 e^{-\lambda t} = a_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t}.$$

Начальная активность  $a_0 = \lambda N_0$ .

$$\text{Отсюда: } a_0 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{m_0}{M} N_A = \frac{\ln 2 \cdot m_0 N_A}{M \cdot T_{1/2}}$$

Подставив числовые значения, получим результат.

$$\text{Ответ: } a_0 = 5,13 \cdot 10^{12} \text{ Бк, } a = 81,3 \text{ Бк.}$$

### *Задачи для самостоятельного решения*

401. Черное тело имеет температуру  $t_1 = 27^\circ \text{C}$ . Какова будет температура  $t_2$  тела, если в результате нагревания поток излучения увеличится в  $n = 16$  раз?
402. Температура абсолютно черного тела  $T = 2000 \text{ К}$ . Определить длину волны  $\lambda_m$ , на которую приходится максимум энергии излучения, и спектральную плотность энергетической светимости  $(r_\lambda)_{\max}$  для этой длины волны.
403. Определить температуру  $T$  и энергетическую светимость  $R$  абсолютно черного тела, если максимум энергии излучения приходится на длину волны  $\lambda_m = 600 \text{ нм}$ .
404. Из смотрового окошечка печи излучается поток  $\Phi = 4 \text{ кДж/мин}$ . Определить температуру  $T$  печи, если площадь окошечка  $S = 8 \text{ см}^2$ . Излучение считать близким к излучению абсолютно черного тела.
405. Площадь, ограниченная графиком спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела  $r_\lambda(\lambda, T)$  при переходе от температуры  $T_1$  до температуры  $T_2$  увеличилась в 5 раз. Определить, как изменится при этом длина волны  $\lambda_m$ , на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости.
406. Какую энергетическую светимость  $R$  имеет абсолютно черное тело, если максимум его спектральной плотности энергетической светимости приходится на длину волны  $484 \text{ нм}$ ?
407. Мощность  $P$  излучения шара радиусом  $a = 10 \text{ см}$  при некоторой постоянной температуре  $T$  равна  $1 \text{ кВт}$ . Найти эту температуру, считая шар серым телом со степенью черноты  $A = 0,25$ .
408. Поток энергии  $\Phi$ , излучаемый из смотрового окошка плавильной печи, равен  $34 \text{ Вт}$ . Определить температуру  $T$  печи, если площадь отверстия  $S = 6 \text{ см}^2$ .
409. Как и во сколько раз изменится поток излучения абсолютно черного тела, если максимум спектральной плотности энергетической светимости излучения переместится с  $\lambda_{m1} = 780 \text{ нм}$  на длину волны  $\lambda_{m2} = 380 \text{ нм}$ .
410. Абсолютно черное тело имеет температуру  $2900 \text{ К}$ . В результате остывания длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности

энергетической светимости, изменилась на 9 мкм. До какой температуры охладилось тело?

411. Красная граница фотоэффекта для цинка  $\lambda_{кр} = 310$  нм. Определить максимальную кинетическую энергию  $W_{max}$  фотоэлектронов в электрон-вольтах, если на цинк падает свет с длиной волны  $\lambda = 200$  нм.
412. Какова должна быть длина волны электромагнитного излучения, падающего на платиновую пластину, чтобы максимальная скорость фотоэлектронов была  $v_{max} = 3 \cdot 10^8$  м/с?
413. На металл падает рентгеновское излучение с длиной волны  $\lambda = 0,01$  нм. Пренебрегая работой выхода, определить максимальную скорость  $v_{max}$  фотоэлектронов.
414. С какой скоростью вылетают электроны из цезия при освещении желтым светом с длиной волны  $\lambda = 5,9 \cdot 10^{-7}$  м, если работа выхода для цезия  $A_{вых} = 1,89$  эВ.
415. Какую длину волны  $\lambda$  имеют световые волны, падающие на поверхность цезия, если фотоэлектроны, вылетающие из цезия, имеют скорость  $2 \cdot 10^6$  м/с? Красная граница фотоэффекта для цезия  $\lambda_{кр} = 6,9 \cdot 10^{-7}$  м.
416. Определить красную границу фотоэффекта для цезия, если при освещении его излучением с длиной волны  $\lambda = 0,35$  мкм задерживающее напряжение  $U_3 = 1,47$  В.
417. Какая часть энергии фотона, вызывающего фотоэффект, расходуется на работу выхода, если наибольшая скорость фотоэлектронов, вырванных с поверхности цинка, составляет  $10^5$  м/с? Красная граница соответствует длине волны  $\lambda = 290$  нм.
418. Фотоэлектроны, вырывающиеся с поверхности металла, полностью задерживаются при приложении обратного напряжения  $U_3 = 3$  В. Начинается фотоэффект при частоте падающего излучения  $6 \cdot 10^{14}$  Гц. Определить работу выхода электронов из этого металла и частоту применяемого излучения.
419. На поверхность калия падает излучение с длиной волны  $\lambda = 400$  нм. Работа выхода электронов из калия равна 2,2 эВ. Определить величину задерживающего напряжения.
420. Задерживающее напряжение для платиновой пластинки с работой выхода 6,3 эВ составляет 3,7 В. При использовании излучения с такой же частотой для другой пластинки, задерживающее напряжение составило 5,3 В. Определить работу выхода электронов из этой пластинки.
421. Рентгеновские лучи с длиной волны  $\lambda_0 = 20$  пм испытывают комптоновское рассеяние под углом  $\varphi = 90^\circ$ . Найти изменение  $\Delta\lambda$  длины волны рентгеновских лучей при рассеянии, а также энергию  $W'_e$  электрона отдачи.
422. Определить коэффициент отражения  $\rho$  поверхности, если при интенсивность света  $I = 120$  Вт/м<sup>2</sup>, давление  $P$  света на нее оказалось равным 0,5 мкПа.

423. Фотон с длиной волны  $\lambda = 15$  пм рассеялся на свободном электроне. Длина волны рассеянного фотона  $\lambda' = 16$  пм. Определить угол  $q$  рассеяния.
424. Свет с длиной волны  $\lambda = 600$  нм нормально падает на зеркальную поверхность и производит на нее давление  $P = 4$  мкПа. Определить число  $N$  фотонов, падающих за время  $t = 10$  с на площадь  $S = 1$  мм<sup>2</sup> этой поверхности.
425. В результате эффекта Комптона фотон с энергией  $\epsilon = 1,02$  МэВ рассеян на свободных электронах на угол  $q = 150^\circ$ . Определить энергию  $\epsilon'$  рассеянного фотона.
426. На зеркальную поверхность площадью  $S = 6$  см<sup>2</sup> падает нормально поток излучения  $\Phi = 0,8$  Вт. Определить давление  $P$  и силу давления  $F$  света на эту поверхность.
427. Фотон с энергией  $\epsilon = 0,51$  МэВ при рассеянии на свободном электроне потерял половину своей энергии. Определить угол рассеяния  $q$ .
428. На поверхность площадью  $S = 0,01$  м<sup>2</sup> в единицу времени падает поток излучения  $\Phi = 1,05$  Вт. Найти световое давление в случаях, когда поверхность полностью отражает и полностью поглощает падающие на неё лучи.
429. Определить максимальное изменение длины волны  $(\Delta\lambda)_{\max}$  при комптоновском рассеянии света на свободных электронах.
430. При комптоновском рассеянии энергия падающего фотона распределяется поровну между фотоном и электроном отдачи. Угол рассеяния  $\pi/2$ . Найти энергию  $\epsilon'$  рассеянного фотона.
431. Определить энергию  $\epsilon$  фотона, соответствующего второй линии ультрафиолетовой серии (серии Лаймана) спектра атома водорода.
432. Вычислить по теории Бора радиус  $r_2$  второй стационарной орбиты и скорость  $v_2$  электрона на этой орбите для атома водорода.
433. Вычислить по теории Бора период  $T$  вращения электрона в атоме водорода, находящегося в возбужденном состоянии, определяемом главным квантовым числом  $n=2$ .
434. Электрон в атоме водорода находится на третьем энергетическом уровне. Определить кинетическую, потенциальную и полную энергию электрона. Ответ выразить в электрон-вольтах.
435. Кванты излучения выбивают из атома водорода, находящегося в основном состоянии, электроны с кинетической энергией  $E_{кин} = 10$  эВ. Определить длину волны излучения.
436. Максимальная длина волны спектральной линии серии Лаймана равна 0,12 мкм. Предполагая, что постоянная Ридберга неизвестна, определите максимальную длину волны спектральной линии серии Бальмера.
437. Определить длину волны излучения, соответствующего третьей линии в видимой части спектра атома водорода.
438. Вычислить по теории Бора радиус  $r_4$  четвертой стационарной орбиты и скорость  $v_4$  электрона на этой орбите для атома водорода.

439. Определить длину волны излучения, испускаемого атомами водорода при переходе электронов с пятого энергетического уровня на второй. К какой серии относится эта линия и какая она по счету?
440. Определить кинетическую энергию  $E_{кин}$ , которой будут обладать электроны, выбиваемые из атома водорода излучением с длиной волны  $\lambda = 60$  нм.
441. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов  $U = 200$  В, имеет длину волны де Бройля  $2,02$  пм. Найти массу  $m$  частицы, если ее заряд численно равен заряду электрона.
442. Масса движущегося электрона в два раза больше его массы покоя. Чему равна минимальная неопределенность координаты электрона?
443. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы длина волны де Бройля была равна  $0,1$  нм?
444. Используя соотношение неопределенностей, определить низший энергетический уровень электрона в атоме водорода. Принять линейные размеры атома  $0,1$  нм.
445. Вычислить длину волны де Бройля  $\lambda$  для протона, движущегося со скоростью  $v = 0,6 c$  ( $c$  - скорость света в вакууме). Масса протона  $1,67 \cdot 10^{-27}$  кг.
446. Вычислить наиболее вероятную дебройлевскую длину волны  $\lambda$  молекул азота, содержащихся в воздухе при температуре  $T = 20^\circ\text{C}$ .
447. Используя соотношение неопределенности, определить кинетическую энергию протона в моноэнергетическом пучке, используемого для исследования структуры с линейными размерами порядка  $10^{-15}$  м.
448. Определить энергию  $\Delta W$ , которую необходимо дополнительно сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась от  $\lambda_1 = 0,2$  мм до  $\lambda_2 = 0,1$  нм.
449. Электрон с кинетической энергией  $T = 15$  эВ находится в металлической пылинке диаметром  $d = 1$  мкм. Оценить относительную неточность  $\Delta v$ , с которой может быть определена скорость электрона.
450. Определить длины волн де Бройля  $\alpha$ -частицы и протона, прошедших одинаковую разность потенциалов  $U = 1$  кВ.
451. Электрон находится в прямоугольной потенциальной яме с непроницаемыми стенками. Ширина ямы  $l = 0,2$  нм, энергия электрона в яме  $E = 37,8$  эВ. Определить номер  $n$  энергетического уровня.
452. Электрон, находящийся в бесконечной глубокой, одномерной, прямоугольной потенциальной яме, испускает фотон частотой  $10^{15}$  Гц при переходе с третьего энергетического уровня в основное состояние. Какова ширина потенциальной ямы?
453. Протон и электрон прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов  $\Delta\phi = 10$  кВ. Во сколько раз отличаются вероятности прохождения частиц через барьер для электрона и для протона, если высота  $U$  барьера равна  $20$  кэВ и ширина  $l = 0,1$  нм?

454. Частица в бесконечно глубокой потенциальной яме находится в основном состоянии. Какова вероятность обнаружения частицы в крайней трети ямы?
455. Частица находится в бесконечной глубокой, одномерной, прямоугольной потенциальной яме. Найти отношение разности  $\Delta E_{n,n+1}$  соседних энергетических уровней к энергии  $E_n$  частицы для  $n = 2$ .
456. Определить, при какой ширине  $l$  прямоугольного потенциального барьера вероятность прохождения электрона через барьер равна 0,01? Разность энергий  $U - E = 10 \text{ эВ}$ .
457. Найти длины волн фотонов  $\lambda$ , которые могут быть испущены электроном, находящимся в бесконечной глубокой, одномерной, прямоугольной потенциальной яме на третьем энергетическом уровне. Ширина потенциальной ямы  $l = 0,2 \text{ нм}$ .
458. Электрон находится в бесконечно глубокой, одномерной, прямоугольной потенциальной яме шириной  $l = 0,1 \text{ нм}$ . Определить в электрон-вольтах наименьшую разность энергетических уровней электрона.
459. Электрон проходит через прямоугольный потенциальный барьер шириной  $l = 0,5 \text{ нм}$ . Высота  $U$  барьера больше энергии электрона  $E$  на 1%. Вычислить коэффициент прозрачности  $D$ , если энергия электрона  $E = 10 \text{ эВ}$ .
460. В прямоугольной потенциальной яме шириной  $l$  с абсолютно непроницаемыми стенками ( $0 < x < l$ ) находится частица в основном состоянии. Найти вероятность местонахождения этой частицы в области  $\frac{1}{4}l < x < \frac{3}{4}l$ .
461. Записать возможные значения квантовых чисел  $n, l, m, s$  для электрона атома водорода в состоянии  $3S$ .
462. Максимальная  $z$ -проекция орбитального момента импульса электрона в атоме водорода равна  $3\hbar$ . Определить энергию электрона в этом состоянии.
463. Записать возможные значения квантовых чисел  $n, l, m, s$  для электрона атома водорода в состоянии  $4f$ .
464. Определить максимальный орбитальный момент импульса электрона атома водорода в состоянии с энергией, равной  $E_n = -0,85 \text{ эВ}$ .
465. Определить сколько различных волновых функций соответствует главному квантовому числу  $n=2$  (с учетом и без учета спина).
466. Во сколько раз орбитальный момент импульса электрона в  $f$  состоянии больше, чем для электрона в  $d$  состоянии.
467. Электрон в атоме находится в  $d$  состоянии. Определить орбитальный момент импульса электрона и максимальное значение проекции момента импульса на направление  $z$ .
468. Заполненной электронной оболочке соответствует главное квантовое число  $n=3$ . Определить число электронов на этой оболочке, которые имеют квантовые числа: 1)  $m_s = -\frac{1}{2}$ ; 2)  $m = -2$ .
469. Определить максимальный орбитальный момент импульса электрона атома водорода в состоянии с энергией, равной  $E_n = -3,38 \text{ эВ}$ .

470. Электрон в атоме водорода находится в  $1s$ -состоянии. При поглощении фотона с энергией  $\epsilon=10,15$  эВ электрон перешел в возбужденное состояние с максимально возможным значением орбитального квантового числа. Определить изменение орбитального момента импульса электрона.
471. Найти число свободных электронов  $N$ , приходящихся на один атом натрия, если энергия Ферми при  $T=0$  К равна  $3,15$  эВ.
472. Определить концентрацию свободных электронов в металле при  $T=0$  К, при которой уровень Ферми равен  $1$  эВ.
473. Найти число свободных электронов  $N$ , приходящихся на один атом лития, если энергия Ферми при  $T=0$  К равна  $4,72$  эВ.
474. Определить отношение концентраций свободных электронов при  $T=0$  К в литии и цезии, если энергия Ферми в этих металлах соответственно равна  $4,72$  эВ и  $1,53$  эВ.
475. Определить уровень Ферми для калия при температуре  $T=0$  К, если среднее число свободных электронов, приходящееся на один атом калия, равно  $0,9$ .
476. Во сколько раз изменится электропроводность чистого германия при повышении температуры от  $-23$  °С до  $+27$  °С? Ширина запрещенной зоны для германия равна  $E_z=0,74$  эВ.
477. Вычислить, во сколько раз удельная проводимость кремния при  $t=-10$  °С меньше, чем при  $t=30$  °С, если ширина запрещенной зоны  $E_z=1,1$  эВ.
478. Какова вероятность того, что электрон в металле при температуре  $27$  °С займет состояние, лежащее на  $0,1$  эВ выше уровня Ферми?
479. На какую величину отличается от энергии Ферми энергия состояния, вероятность заполнения которого при  $0$  °С равна  $0,99$ ?
480. Определить вероятность того, что электрон в металле займет энергетическое состояние, находящееся ниже уровня Ферми на  $0,05$  эВ?
481. Вычислить энергию связи  $E_{св}$  ядра дейтерия  ${}^2_1\text{H}$ .
482. Вычислить энергию связи  $E_{св}$  ядра трития  ${}^3_1\text{H}$ .
483. Найти энергию связи ядра изотопа  ${}^7_3\text{Li}$ .
484. Найти удельную энергию связи ядра  ${}^{17}_8\text{O}$ .
485. Найти удельную энергию связи ядра  ${}^{12}_6\text{C}$ .
486. Вычислить энергетический эффект  $Q$  реакции  ${}^9_4\text{Be}+{}^4_2\text{He}\rightarrow{}^{12}_6\text{C}+{}^1_0\text{n}$ .
487. Найти энергию, поглощенную при реакции  ${}^{14}_7\text{N}+{}^4_2\text{He}\rightarrow{}^1_1\text{H}+{}^{17}_8\text{O}$ .
488. Найти тепловой эффект реакции  ${}^7_3\text{Li}+{}^2_1\text{H}\rightarrow{}^8_4\text{Be}+{}^1_0\text{n}$ .
489. При бомбардировке изотопа  ${}^6_3\text{Li}$  ядрами дейтерия  ${}^2_1\text{H}$  образуются две  $\alpha$ -частицы. При этом выделяется энергия  $Q=22,3$  МэВ. Зная массы дейтерия и  $\alpha$ -частицы, найти массу  $m$  изотопа лития  ${}^6_3\text{Li}$  в а.е.м.
490. Найти число протонов и нейтронов, входящих в состав ядер трех изотопов магния: а)  ${}^{24}_{12}\text{Mg}$ ; б)  ${}^{25}_{12}\text{Mg}$ ; в)  ${}^{26}_{12}\text{Mg}$ .

491. Определить число  $\Delta N$  атомов радиоактивного препарата йода  $^{131}_{53}I$  массой  $m = 0,5$  мкг, распавшихся в течение времени: 1)  $t_1 = 1$  мин;  $t_2 = 7$  сут.
492. Определить активность  $a$  радиоактивного препарата  $^{98}_{38}Sr$  массой  $m = 0,1$  мкг.
493. Найти период полураспада  $T_{1/2}$  радиоактивного изотопа, если его активность за время  $t = 10$  сут уменьшилась на 24% по сравнению с первоначальной.
494. Определить, какая доля радиоактивного изотопа актиния  $^{225}_{89}Ac$  распадается в течение времени  $t = 6$  сут.
495. Активность  $a$  некоторого изотопа за время  $t = 10$  сут уменьшилась на 20%. Определить период полураспада  $T_{1/2}$  этого изотопа.
496. Найти среднюю продолжительность жизни  $\tau$  атома радиоактивного изотопа кобальта  $^{60}_{27}Co$ .
497. Во сколько раз уменьшится активность изотопа  $^{32}_{15}P$  через время  $t = 20$  сут?
498. На сколько процентов уменьшится активность изотопа иридия  $^{192}_{77}Ir$  за время  $t = 15$  сут?
499. Определить число  $\Delta N$  ядер, распадающихся в радиоактивном изотопе фосфора  $^{32}_{15}P$  массой  $m = 1$  мг в течение времени: 1)  $t_1 = 1$  мин; 2)  $t_2 = 5$  сут
500. Из каждого миллиона атомов радиоактивного изотопа каждую секунду распадается 200 атомов. Определить период полураспада  $T_{1/2}$  изотопа.

## Приложение

### Основные физические постоянные

Элементарный заряд	$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса покоя электрона	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя $\alpha$ -частицы	$m_\alpha = 6,64 \cdot 10^{-27}$ кг
Заряд протона	$q_p = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Заряд $\alpha$ -частицы	$q_\alpha = 3,2 \cdot 10^{-19}$ Кл
Энергия ионизации водорода	$E_{\text{ион}} = 13,6$ эВ = $2,18 \cdot 10^{-18}$ Дж

### Массы атомов некоторых изотопов

Изотоп	Символ	Масса, а.е.м.
Нейтрон	${}^1_0\text{n}$	1,00867
Водород	${}^1_1\text{H}$	1,00783
	${}^2_1\text{H}$	2,01410
	${}^3_1\text{H}$	3,01605
Гелий	${}^3_2\text{He}$	3,01603
	${}^4_2\text{He}$	4,00260
Литий	${}^6_3\text{Li}$	6,01513
	${}^7_3\text{Li}$	7,01601
Бериллий	${}^7_4\text{Be}$	7,01693
	${}^9_4\text{Be}$	9,01219
Углерод	${}^{12}_6\text{C}$	12,0000
	${}^{13}_6\text{C}$	13,00355
	${}^{14}_6\text{C}$	14,00324
Азот	${}^{14}_7\text{N}$	14,00307
Кислород	${}^{16}_8\text{O}$	15,99491
	${}^{17}_8\text{O}$	16,99913

## Содержание

Общие методические указания	3
Рабочая программа раздела «Атомная физика»	5
Основы атомной физики	6
1. Квантовая физика	6
Тепловое излучение	6
Законы теплового излучения	8
Фотоэффект	12
Давление света. Эффект Комптона	16
Атом водорода	18
Постулаты бора	21
Длина волны Де-Бройля	24
Соотношение неопределенностей Гейзенберга	25
Волновая функция	26
Уравнение Шредингера	27
Частица в потенциальной яме	28
Прохождение частицы сквозь потенциальный барьер.	32
Туннельный эффект	
Атом водорода в квантовой механике	32
Спин	36
2. Физика твердого тела	37
Элементы квантовой статистики	37
Элементы зонной теории твердого тела	39
<i>p-n</i> переход	46
3. Физика атомного ядра	50
Радиоактивный распад	52
Примеры решения задач	55
1. Квантовая физика	55
2. Физика твердого тела	73
3. Физика атомного ядра	75
Задачи для самостоятельного решения к контрольной работе №4	78
Приложение	85